Σημειώσεις στις κατανομές και τις συναρτήσεις Green
με εφαρμογές στην επίλυση
προβλημάτων συνοριακών τιμών σε μια διάσταση

Αναστάσιος Γ. Τόγκας
Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ηράκλειο, Δεκέμβρης 2008

Περιεχόμενα

Η κειμενογράφηση είναι προϊόν επεξεργασίας των ελεύθερων λογισμικών LaTeX (με την γραμματοσειρά Kerkis ©Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου) και Kile για το λειτουργικό σύστημα ανοικτού κώδικα Linux με πυρήνα 2.6.22.

0 Ιστορική αναδρομή

Η ανακάλυψη των κατανομών έγινε το 1944 από τον Γάλλο μαθηματικό Laurent Schwartz. Το σημαντικό μαθηματικό έργο του Schwartz, συμπεριλαμβανομένων των κατανομών, του απέφερε το Fields Medal έξι χρόνια αργότερα. Όπως ο ίδιος ο Schwartz αναφέρει στην αυτοβιογραφία του [1], ήταν θέμα χρόνου να ανακαλυφθούν οι κατανομές από κάποιον άλλο μαθηματικό. Ωστόσο, έστω κι αν ο Schwartz γράφει κάτι τέτοιο από μετριοπάθεια ή συμπάθεια προς τους συναδέλφους του, είναι αδιαμφισβήτητο ιστορικό γεγονός ότι οι κατανομές αποτέλεσαν μια κάθε άλλο παρά μετριοπαθή και συμπαθή ιστορία για τους λεγόμενους "καθαρούς" μαθηματικούς, που προηγήθηκαν κάποια χρόνια από την ανακάλυψη αυτή του Schwartz.

Ιστορικά οι ρίζες των κατανομών βρίσκονται στην δουλειά του Άγγλου ηλεκτρολόγου μηχανικού και εφαρμοσμένου μαθηματικού Oliver Heaviside σχετικά με την μελέτη ηλεκτρικών κυκλωμάτων. Ο Heaviside ανέπτυξε μια "μαγική συνταγή" για να λύνει τις διαφορικές εξισώσεις που διέπουν την δυναμική ηλεκτρικών κυκλωμάτων, τον συμβολικό λογισμό. Ο λογισμός αυτός ήταν αδιανόητος για την πλειοψηφία των μαθηματικών της ανάλυσης την εποχή που έζησε ο Heaviside. Πολύ περισσότερο αδιανόητη ήταν η λεγόμενη "συνάρτηση" δ καθώς και οι παράγωγοί της, που είχε εισαγάγει και πάλι ο Heaviside στην μελέτη των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

Ο Heaviside εφάρμοσε τις μεθόδους τους δίχως τις ευλογίες των μαθηματικών της εποχής του και μάλιστα έλυσε δύσκολα προβλήματα με μεγάλη επιτυχία. Η πλειοψηφία των μαθηματικών δεν αποδέχτηκε τον συμβολικό λογισμό του και την διαβολική συνάρτηση δ που χρησιμοποιούσε, και έτσι οι μαθηματικές του ανακαλύψεις απορρίφθηκαν, έστω κι αν έδιναν σωστά αποτελέσματα. Ο Heaviside για να υπερασπίσει τον συμβολικό λογισμό που είχε αναπτύξει είπε:

> Γιατί θα πρέπει να αρνηθώ ένα ωραίο γεύμα απλά και μόνο επειδή δεν μπορώ να καταλάβω την πεπτική διαδικασία που εμπλέκεται;

Όμως τελικά, έγινε ο ίδιος βορά στην αυστηρότητα των "καθαρών" μαθηματικών και μάλιστα το ηθικό του καταβλήθηκε από την μη αποδοχή των ανακαλύψεών του, σε τέτοιο βαθμό που πέθανε διανοητικά ασταθής το 1925. Ο συμβολικός λογισμός που ανέπτυξε ο Heaviside βρήκε την μαθηματική του δικαίωση αργότερα μέσω των μετασχηματισμών Laplace από τους Wiener, Carson και Vanderpol. Αλλά το ίδιο δεν ίσχυε ακόμα για την συνάρτηση δ και τις παραγώγους της. Και για να γίνουν τα πράγματα ακόμα πιο διαβολικά, σ' ένα άρθρο το 1926 ο Άγγλος θεωρητικός φυσικός Paul Dirac επανέφερε την συνάρτηση δ, που φέρει πλέον το όνομά του, δίχως βέβαια τότε κανείς να θυμηθεί τον μακαρίτη Heaviside! Τα νέα

[1] L. Schwartz, *A Mathematician Grappling with His Century*, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 2001.

αποτελέσματα έκαναν τους φυσικούς να δουλεύουν ακόμα πιο άνετα χρησιμοποιώντας την συνάρτηση δ του Dirac, χωρίς να είναι σε θέση να δικαιολογήσουν από αυστηρή μαθηματική σκοπιά τίποτα. Όμως τα αποτελέσματα που έδιναν ήταν απόλυτα ακριβή, οπότε κάποια σωστή μαθηματική αιτιολόγηση θα έπρεπε να υπάρχει. Αυτήν ακριβώς αναζήτησε και ανακάλυψε τελικά ο Schwartz γύρω στο 1944, εισάγοντας την θεωρία των κατανομών ή των γενικευμένων συναρτήσεων.

Το ότι η αφετηρία της έννοιας της κατανομής βρίσκεται στην φυσική δεν είναι τυχαίο γεγονός. Πολλές φορές οι φυσικοί πρέπει να περιγράψουν με μαθηματικούς όρους μια φυσική οντότητα που είναι εντοπισμένη σε απειροελάχιστα μικρό χωρίο (αν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι χωρικές), ή μια διεργασία που διαρκεί στιγμιαία (αν ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή). Το μάταιο της προσπάθειας των φυσικών της εποχής εκείνης, και συνάμα το τόσο τραγικό από την σκοπιά των "καθαρών" μαθηματικών μπορεί να συνοψισθεί στο εξής. Στην ύπαρξη μια συνάρτησης $\delta : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ που έχει τις ιδιότητες

$$(i) \quad \delta(x) = 0 \quad \text{για} \;\; x \neq 0\,, \qquad (ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1\,.$$

Μια τέτοια συνάρτηση δεν μπορεί να υπάρξει, αφού σύμφωνα με τα βασικά στοιχεία ολοκλήρωσης κατά Riemann (ή ακόμα και κατά Lebesgue), δυο συναρτήσεις που είναι ταυτόσημες παντού εκτός από ένα και μόνο σημείο, έχουν ακριβώς το ίδιο ολοκλήρωμα. Έτσι, αφού η $\delta(x)$ είναι μηδέν παντού εκτός από το σημείο $x = 0$, το ολοκλήρωμά της θα πρέπει να είναι μηδέν και όχι 1! Κι όμως, χάρη στο Dirac και τη δουλειά του Schwartz μια τέτοια "συνάρτηση" υπάρχει, με μια γενικευμένη έννοια, και μάλιστα έχει και άπειρες παραγώγους.

Τα παρακάτω φιλοδοξούν να αποτελέσουν μια σύντομη - και σίγουρα αρκετά ελλιπή - εισαγωγή στην έννοια των κατανομών και των συναρτήσεων Green με στόχο να χρησιμοποιηθούν στην επίλυση απλών μονοδιάστατων προβλημάτων συνοριακών τιμών. Γράφτηκαν για να καλύψουν συμπληρωματικές ανάγκες διδασκαλίας του μαθήματος "Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι" του προπτυχιακού προγράμματος σπουδών του Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης. Θέλω να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Θεμιστοκλή Μήτση που είχε την ευγενική καλοσύνη να διαβάσει την διαπραγμάτευση των κατανομών και να μου επισημάνει αβλεψίες και λάθη. Πιθανότατα, υπάρχουν και άλλες αβλεψίες και λάθη και θα χαιρόμουν ιδιαίτερα να μου επισημανθούν από τον δυνητικό αναγνώστη.

Βιβλιογραφία

I.M. Gelfand and G.E. Shilov, *Generalized functions*, 5 volumes, Academic Press, New York London, 1968.

I. Stakgold, *Green's Functions and Boundary Value Problems*, (Pure and Applied Mathematics Ser.), John Wiley & Sons, New York, 1979.

1 Κατανομές

1.1 Ελεγκτικές συναρτήσεις

Μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ λέγεται *ομαλή* στον $\mathbb{R}$ αν είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η $\phi(x)$ έχει συνεχείς παραγώγους $\phi^{(k)}(x)$ κάθε τάξης k σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}$. Το σύνολο όλων των ομαλών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ δηλώνεται με $C^\infty(\mathbb{R})$.

Μια *ελεγκτική* συνάρτηση $\phi(x)$ είναι μια συνάρτηση $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ που είναι

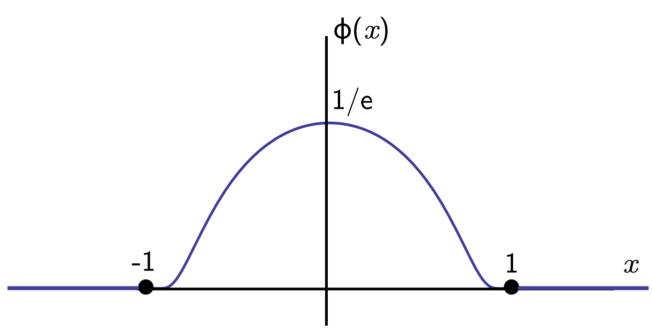
- ομαλή συνάρτηση στον $\mathbb{R}$, και
- η $\phi(x)$ μηδενίζεται *έξω* από κάποιο συμπαγές ($\equiv$ κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}$ (το οποίο δεν είναι αναγκαστικά το ίδιο για κάθε ελεγκτική συνάρτηση).

Ο χώρος όλων των ελεγκτικών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}$ συμβολίζεται με $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Δεν είναι καθόλου προφανής η ύπαρξη, μη-τετριμμένων, ελεγκτικών συναρτήσεων. Όμως ο χώρος $C_0^\infty(\mathbb{R})$ δεν είναι κενός, όπως δείχνει το επόμενο.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την συνάρτηση με τύπο

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right) & , |x| < 1 \, , \\ 0 & , |x| \geq 1 \, . \end{cases} \tag{1.1}$$



Σχήμα 1: Η γραφική παράσταση της $\phi(x)$ που δίνεται από την σχέση (1.1)

Θα δείξουμε ότι η $\phi(x)$ είναι μια ελεγκτική συνάρτηση στον $\mathbb{R}$. Πράγματι, εύκολα δείχνει κανείς ότι η $\phi(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη εκτός πιθανώς στα σημεία $x = \pm 1$.
Η $\phi(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση στα σημεία $x = \pm 1$ γιατί

$$\lim_{x \to 1^-} \exp(\frac{1}{x^2-1}) = 0 = \phi(1^+) \, ,$$

και
$$\lim_{x\to -1^+}\exp(\frac{1}{x^2-1}) = 0 = \phi(-1^-)\,.$$
Το ότι η $\phi(x)$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στα σημεία $x=\pm 1$, έπεται από το γεγονός ότι
$$\lim_{x\to 1^-}\phi^{(k)}(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{(-2)^k}{(x^2-1)^{2k}}\exp(\frac{1}{x^2-1}) = 0 = \phi^{(k)}(1^+)\,,$$
και
$$\lim_{x\to -1^+}\phi^{(k)}(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{2^k}{(x^2-1)^{2k}}\exp(\frac{1}{x^2-1}) = 0 = \phi^{(k)}(-1^-)\,,$$
για κάθε k θετικό ακέραιο. Επιπλέον, η $\phi(x)$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-1,1]$, οπότε η $\phi(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Μηδενικές ακολουθίες ελεγκτικών συναρτήσεων

Μια ακολουθία $\{\phi_1(x),\phi_2(x),\ldots,\phi_m(x),\ldots\}$ ελεγκτικών συναρτήσεων λέγεται μηδενική ακολουθία στον $C_0^\infty(\mathbb{R})$ αν

- Υπάρχει ένα κοινό φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έξω από το οποίο όλες οι συναρτήσεις $\phi_m(x)$ μηδενίζονται.
- Η ακολουθία $\{\phi_m(x)\}_{m=0}^\infty$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στη μηδενική συνάρτηση, δηλαδή
$$\lim_{m\to\infty}\max_{x\in\mathbb{R}}|\phi_m(x)| = 0\,, \tag{1.2}$$
- Η ακολουθία των παραγώγων $\{\phi_m^{(k)}(x)\}_{m=0}^\infty$ συγκλίνει *ομοιόμορφα* στη μηδενική συνάρτηση, και αυτό συμβαίνει για κάθε παράγωγο τάξης k, δηλαδή
$$\lim_{m\to\infty}\max_{x\in\mathbb{R}}|\phi_m^{(k)}(x)| = 0\,,$$
για οποιοδήποτε k θετικό ακέραιο.

Παράδειγμα: Θεωρούμε την ακολουθία ελεγκτικών συναρτήσεων
$$\phi_m(x) = \frac{1}{m}\phi(x)\,,$$
όπου η $\phi(x)$ είναι η ελεγκτική συνάρτηση που δίνεται από την σχέση (1.1). Προφανώς οι $\phi_m(x)$ μηδενίζονται έξω από το $[-1,1]$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Επειδή
$$\max_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{m}\phi(x)\right| = \max_{x\in[-1,1]}\left|\frac{1}{m}\phi(x)\right| = \frac{1}{m\,e}\,,$$
έχουμε ότι
$$\lim_{m\to\infty}\max_{x\in\mathbb{R}}|\phi_m(x)| = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{m\,e} = 0\,.$$

Επιπλέον, επειδή η $\phi(x)$ είναι ομαλή συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ και μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-1, 1]$, έπεται ότι η $|\phi^{(k)}(x)|$ παίρνει την μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο του διαστήματος $[-1, 1]$. Ας πούμε την τιμή αυτή $M(k)$. Οπότε,

$$\max_{x\in\mathbb{R}} \left|\phi_m^{(k)}(x)\right| = \max_{x\in[-1,1]} \left|\phi_m^{(k)}(x)\right| = \frac{M(k)}{m}\,,$$

και συνεπώς έχουμε ότι και

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi_m^{(k)}(x)| = 0\,,$$

για οποιοδήποτε k θετικό ακέραιο. Άρα η ακολουθία $\{\phi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ είναι μια μηδενική ακολουθία στον $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$.

1.2 Γραμμικά συναρτησιακά - Κατανομές

Λέμε ότι η f είναι ένα *γραμμικό συναρτησιακό* (ή συναρτησοειδές) στον $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, αν υπάρχει ένα κανόνας που αντιστοιχεί σε κάθε $\phi(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ έναν πραγματικό αριθμό, τον οποίο θα συμβολίζουμε με $< f, \phi >$, έτσι που

$$< f, a_1\phi_1 + a_2\phi_2 >= a_1 < f, \phi_1 > +a_2 < f, \phi_2 >\,,$$

για κάθε $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ και $\phi_1, \phi_2 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$.
Ένα γραμμικό συναρτησιακό f στον $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ λέγεται *συνεχές* αν ισχύει η ακόλουθη πρόταση:

Αν $\{\phi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ είναι μηδενική ακολουθία στον $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, τότε $\lim\limits_{m\to\infty} < f, \phi_m(x) >= 0\,.$

Ορισμός: Ένα *συνεχές, γραμμικό συναρτησιακό* στον $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ λέγεται **κατανομή**.

Πολλές κατανομές (αλλά σίγουρα όχι όλες και πολύ σημαντικές) παράγονται μέσω σχετικά απλών συνηθισμένων συναρτήσεων, οι οποίες δεν είναι αναγκαίο να είναι ούτε καν συνεχείς συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$. Πιο συγκεκριμένα:
Μια συνάρτηση $f(x)$ στον $\mathbb{R}$ λέγεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* αν το ολοκλήρωμα

$$\int_{\Omega} |f(x)|\mathrm{dx}\,,$$

υπάρχει για κάθε φραγμένο διάστημα Ω του $\mathbb{R}$.
Θεώρημα: Μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ του $\mathbb{R}$ ορίζει (παράγει) μια κατανομή f μέσω της σχέσης

$$< f, \phi >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x\,. \tag{1.3}$$

Απόδειξη: Είναι εύκολο να δειχθεί ότι η απεικόνιση $f : C_0^{\infty}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ όπως ορίζεται από την σχέση (1.3) είναι γραμμικό συναρτησιακό. Το ζήτημα είναι να δειχθεί ότι είναι και συνεχές.

Πράγματι, έστω $\{\phi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ μηδενική ακολουθία στον $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$. Τότε

$$| < f(x), \phi_m(x) > | = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\Omega} f(x)\phi_m(x)\mathrm{d}x \right| \leq \left(\max_{x\in\Omega} |\phi_m(x)| \right) \int_{\Omega} |f(x)|\mathrm{d}x\,, \qquad (1.4)$$

όπου Ω είναι το διάστημα έξω από το οποίο οι ϕ_m μηδενίζονται. Επειδή η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο Ω και η $\{\phi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ μηδενική ακολουθία (δες σχέση (1.2)), έπεται από την σχέση (1.4) ότι

$$\lim_{m\to\infty} < f(x), \phi_m(x) >= 0$$

Οπότε η δράση της f που ορίζεται από την σχέση (1.3) ορίζει ένα συνεχές, γραμμικό συναρτησιακό, δηλαδή με άλλα λόγια, μια κατανομή. □

Μια κατανομή που μπορεί να γραφεί στην μορφή (1.3) λέγεται **κανονική**. Όλες οι υπόλοιπες κατανομές καλούνται **ιδιόμορφες**.

Η κατανομή δ του Dirac

Η κατανομή δ του Dirac με πόλο στο 0, ορίζεται από την σχέση

$$< \delta, \phi >= \phi(0)\,. \qquad (1.5)$$

Η κατανομή δ του Dirac δεν είναι κανονική κατανομή, γιατί ας υποθέσουμε ότι ήταν. Τότε θα υπήρχε τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ στον $\mathbb{R}$ τέτοια που

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \phi(0)\,, \qquad \forall\, \phi(x) \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})\,.$$

Θεωρούμε την μονοπαραμετρική οικογένεια ελεγκτικών συναρτήσεων

$$\phi_\epsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\epsilon^2}{x^2-\epsilon^2}\right) & , |x| < \epsilon\,, \\ \\ 0 & , |x| \geq \epsilon\,, \end{cases} \qquad (1.6)$$

όπου ϵ θετικός, πραγματικός αριθμός και παίζει το ρόλο μιας παραμέτρου. Παρατηρούμε για την οικογένεια των ελεγκτικών συναρτήσεων (1.6) ισχύει ότι

$$\phi_\epsilon(0) = 1/e\,, \qquad |\phi_\epsilon(x)| \leq 1/e\,.$$

Οπότε έχουμε

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_\epsilon(x)\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{|x|<\epsilon} f(x) \exp\left(\frac{\epsilon^2}{x^2-\epsilon^2}\right) \mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{e} \int_{|x|<\epsilon} |f(x)|\mathrm{d}x\,. \qquad (1.7)$$

Παίρνοντας $\epsilon \to 0$, το χωρίο ολοκλήρωσης στον τελευταίο όρο της σχέσης (1.7) τείνει στο μηδέν, και συνεπώς

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_\epsilon(x)\mathrm{d}x = 0\,. \tag{1.8}$$

Από την άλλη έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi_\epsilon(x)\mathrm{d}x = \phi_\epsilon(0) = 1/e\,, \tag{1.9}$$

ανεξάρτητα από την παράμετρο ϵ. Οι σχέσεις (1.8) και (1.9), αναιρούν η μία την άλλη. Δηλαδή, ξεκινώντας τον συλλογισμό μας με την υπόθεση ότι η κατανομή Dirac μπορεί να παραχθεί από μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$, φτάσαμε με άτοπο. Συνεπώς, η κατανομή Dirac είναι ιδιόμορφη κατανομή.

ΠΡΟΣΟΧΗ ! Παρά το γεγονός ότι η κατανομή Dirac δ δεν προέρχεται με κανένα τρόπο από συνηθισμένη συνάρτηση θα κάνουμε συστηματικά δύο *λάθη*. Το πρώτο είναι ότι θα γράφουμε $\delta(x)$ και είναι λάθος γιατί το πεδίο ορισμού της κατανομής Dirac δεν είναι το $\mathbb{R}$ αλλά το $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Το δεύτερο λάθος που θα κάνουμε είναι ότι θα γράφουμε τον αριθμό $<\delta, \phi>$ ως

$$<\delta, \phi> = \phi(0) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

και το λάθος είναι στην δεύτερη ισότητα γιατί η κατανομή Dirac δεν μπορεί να γραφεί με τον τρόπο αυτό, όπως δείξαμε προηγουμένως.

Παραγώγιση κατανομών

Αν η $f(x)$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ της οποίας η παράγωγος $f'(x)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε η $f'(x)$ ορίζει την δική της κατανομή ως

$$<f', \phi> = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = f(x)\;\phi(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -<f, \phi'>\,,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η ελεγκτική συνάρτηση $\phi(x)$ μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Αυτό μας υποδεικνύει να ορίσουμε την παράγωγο f' οποιασδήποτε κατανομής $f(x)$ ως εξής

$$<f', \phi> = -<f, \phi'>\,, \tag{1.10}$$

(**προσοχή** στο μείον). Πρέπει να ελεγχθεί ότι με αυτόν τον τρόπο ορίζεται πραγματικά μια κατανομή. Αφού η ϕ είναι ελεγκτική συνάρτηση το ίδιο ισχύει και για την ϕ', και αφού η f είναι κατανομή, η δράση της f στην ϕ' μπορεί να ορισθεί. Η γραμμικότητα προφανώς ισχύει, οπότε αρκεί να δείξουμε την συνέχεια. Αν $\{\phi_m\}$ είναι μια μηδενική ακολουθία στον $C_0^\infty(\mathbb{R})$ το ίδιο ισχύει και για την $\{-\phi_m'\}$, οπότε η ακολουθία αριθμών $-<f, \phi_m>$ τείνει στο 0 καθώς το $m \to \infty$, και έτσι τελικά η f' ορίζει πραγματικά μια κατανομή.

Εφαρμόζοντας επαναληπτικά την παραπάνω διαδικασία βρίσκουμε ότι

$$< f^{(n)}, \phi >= (-1)^n < f, \phi^{(n)} > , \tag{1.11}$$

και συνεπώς φτάνουμε στο αξιοπρόσεκτο συμπέρασμα ότι *κάθε κατανομή μπορεί να παραγωγισθεί όσες φορές θέλουμε.*

Η παράγωγος της κατανομής δ του Dirac

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1.11) στην κατανομή δ του Dirac παίρνουμε

$$< \delta', \phi >= - < \delta, \phi' >= -\phi'(0) . \tag{1.12}$$

Η κατανομή του Heaviside και η παράγωγός της (Ο Heaviside και ο Dirac παρέα !)

Η κατανομή του Heaviside ορίζεται από την τμηματικά συνεχή συνάρτηση

$$H(x) = \begin{cases} 1 , & x > 0 , \\ 0 , & x < 0 , \end{cases} \tag{1.13}$$

Επειδή η $H(x)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση έχουμε

$$< H, \phi >= \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\phi(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} 1\,\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x , \tag{1.14}$$

οπότε η H ορίζει την κατανομή με τύπο

$$< H, \phi >= \int_{0}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x . \tag{1.15}$$

Η παράγωγος H' της H ορίζεται από την σχέση (1.10), η οποία γίνεται

$$< H', \phi >= - < H, \phi' >= - \int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x = -\big(\phi(\infty) - \phi(0)\big) = \phi(0) =< \delta, \phi > , \tag{1.16}$$

και επειδή ισχύει για τυχαία ελεγκτική συνάρτηση ϕ συμπεραίνουμε ότι

$$H'(x) = \delta(x) , \tag{1.17}$$

με την έννοια των κατανομών.

1.3 Ιδιότητες κατανομών

Κατ' αρχήν θα πρέπει να τονισθεί το γεγονός ότι *δεν* είναι αποδεκτό να πολλαπλασιάζουμε κατανομές μεταξύ τους ή να εκτελούμε πιο σύνθετες αλγεβρικές πράξεις. Διατυπώσεις της μορφής $\delta(x)^2$, $1/\delta(x)$, $\exp\delta(x)$ κλπ, *δεν* είναι καλά ορισμένες στην θεωρία των κατανομών, και για τον λόγο αυτό η εφαρμογή τους σε μη-γραμμικά συστήματα είναι πολύ προβληματική.

Πολλαπλασιασμός κατανομών με ομαλές συναρτήσεις.
Αν $a(x)$ είναι ομαλή συνάρτηση του $\mathbb{R}$, και f κατανομή τότε έχουμε

$$< af, \phi >= \int_{\mathbb{R}} a(x)f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)a(x)\phi(x)\mathrm{d}x =< f, a\,\phi > \ . \tag{1.18}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω ιδιότητα στην κατανομή δ καταλήγουμε στο αποτέλεσμα ότι

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)\,, \tag{1.19}$$

το οποίο αξίζει να προσεχθεί από την άποψη των επιμέρους εφαρμογών. Επίσης, η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού με κατανομές γενικά **δεν** ισχύει. Δηλαδή αν $a(x), b(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ και f κατανομή τότε

$$\big(a\,b\big)f \neq a\,\big(bf\big)\,. \tag{1.20}$$

Θα δείξουμε το ότι πράγματι η σχέση (1.20) ισχύει θεωρώντας ένα αντιπαράδειγμα. Θεωρούμε την κατανομή δ του Dirac και την γράφουμε ως εξής

$$\delta(x) = (\frac{1}{x}\,x)\delta(x)\,.$$

Αν ίσχυε η προσεταιριστική ιδιότητα θα είχαμε

$$\delta(x) = (\frac{1}{x}\,x)\delta(x) = \frac{1}{x}\,\big(x\,\delta(x)\big) = \frac{1}{x}\,0 = 0\,,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $x\,\delta(x) = 0$ (δες εξίσωση (1.19) με $a(x) = x$). Άτοπο, γιατί η κατανομή $\delta(x)$ δεν είναι η μηδενική (!) κατανομή, άρα γενικά ισχύει η (1.20).

Μετατόπιση κατανομής.
Αν η τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ στον $\mathbb{R}$ μετατοπισθεί κατά x_0, παίρνουμε την τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x - x_0)$ που ορίζει από μόνη της μια κατανομή με τύπο

$$< f(x-x_0), \phi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(x-x_0)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x+x_0)\mathrm{d}x =< f(x), \phi(x+x_0) > \ .$$

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η δράση $< f(x), \phi(x+x_0) >$ ορίζει πραγματικά κατανομή, οπότε οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η μετατόπιση τυχαίας κατανομής f ορίζεται από το τύπο

$$< f(x-x_0), \phi(x) >=< f(x), \phi(x+x_0) > \ . \tag{1.21}$$

Ειδικότερα για την κατανομή δ του Dirac έχουμε

$$< \delta(x - x_0), \varphi(x) > = < \delta(x), \varphi(x + x_0) > = \varphi(x_0)\,, \tag{1.22}$$

και έτσι μπορεί να ορισθεί η κατανομή δ_{x_0} του Dirac με πόλο στο x_0 ως

$$\delta_{x_0}(x) = \delta(x - x_0)\,. \tag{1.23}$$

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\delta(x - x_0)$ για την κατανομή του Dirac με πόλο στο x_0.

Μετασχηματισμοί ομοιότητας.

Αν η $f(x)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη το ίδιο ισχύει και για την $f(a\,x)$, για κάθε πραγματικό αριθμό $a \neq 0$. Η κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(a\,x)$ είναι

$$< f(a\,x), \varphi(x) >= \int_{\mathbb{R}} f(a\,x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|}\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(\frac{x}{a})\mathrm{d}x = \frac{1}{|a|} < f(x), \varphi(\frac{x}{a}) >\,, \tag{1.24}$$

όπου εκτελέσαμε την αλλαγή μεταβλητής $x \mapsto x/a$ και λάβαμε υπόψη το γεγονός ότι για $a < 0$ τα όρια ολοκλήρωσης αντιστρέφονται και για τον λόγο αυτό εμφανίστηκε η απόλυτη τιμή $|a|$ στην παραπάνω σχέση. Ο ίδιος τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η f είναι ιδιόμορφη κατανομή.

Γενική αλλαγή μεταβλητής.

Για να εκτελέσουμε μια γενική αλλαγή μεταβλητής θεωρούμε μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$ στον $\mathbb{R}$ και μια αλλαγή μεταβλητής $x \mapsto h(x)$. Η νέα κατανομή $f(h(x))$ δίνεται από τον τύπο

$$< f(h(x)), \varphi(x) >=< f(x), \widetilde{\varphi}(x) > \tag{1.25}$$

όπου

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(u)<x} \varphi(u)\mathrm{d}u \tag{1.26}$$

με την προϋπόθεση ότι η $\widetilde{\varphi}(x)$ είναι ελεγκτική συνάρτηση. Ας δούμε αναλυτικά πως μετασχηματίζεται η $\delta(x)$ εκτελώντας την αλλαγή μεταβλητής $x \mapsto h(x) = a\,x - \beta$. Αν $a > 0$ έχουμε ότι

$$\widetilde{\varphi}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(u)<x} \varphi(u)\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\infty}^{\frac{1}{a}(x+\beta)} \varphi(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}\varphi\left(\frac{1}{a}(x+\beta)\right)\,. \tag{1.27}$$

Οπότε

$$< \delta(a\,x - \beta), \varphi(x) > = < \delta(x), \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{1}{a}(x+\beta)\right) >= \frac{1}{a}\,\varphi\left(\frac{\beta}{a}\right) =< \frac{1}{a}\,\delta\left(x - \frac{\beta}{a}\right), \varphi(x) >\,, \tag{1.28}$$

και επειδή η σχέση (1.28) ισχύει για τυχαία ελεγκτική συνάρτηση $\phi(x)$ έχουμε ότι

$$\delta(\alpha\, x - \beta) = \frac{1}{\alpha}\, \delta\Big(x - \frac{\beta}{\alpha}\Big)\,. \tag{1.29}$$

Για την περίπτωση $\alpha < 0$, κι εργαζόμενοι με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\delta(\alpha\, x - \beta) = -\frac{1}{\alpha}\, \delta\Big(x - \frac{\beta}{\alpha}\Big)\,, \tag{1.30}$$

οπότε και οι σχέσεις (1.29) και (1.30) μπορούν να συνδυαστούν και να γράψουμε

$$\delta(\alpha\, x - \beta) = \frac{1}{|\alpha|}\, \delta\Big(x - \frac{\beta}{\alpha}\Big)\,. \tag{1.31}$$

Θέτοντας στην σχέση (1.31) $\alpha = -1$, $\beta = 0$ παίρνουμε

$$\delta(-x) = \delta(x) \tag{1.32}$$

δηλαδή η κατανομή $\delta(x)$ του Dirac είναι μια “άρτια συνάρτηση” (με την συστηματικά λανθασμένη έννοια φυσικά!).

1.4 Άσκηση εξοικείωσης με τις κατανομές

Θεωρούμε $\alpha(x)$ ομαλή συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ και f τυχαία κατανομή. Θα δείξουμε πρώτα ότι ισχύει ο κανόνας παραγώγισης του Leibniz για το γινόμενο ομαλής συνάρτησης με κατανομή, δηλαδή

$$\big(\alpha(x) f\big)' = \alpha(x) f' + \alpha'(x) f\,. \tag{1.33}$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι η κατανομές $\big(\alpha(x) f\big)'$ και $\alpha(x) f' + \alpha'(x) f$ ταυτίζονται. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$< \big(\alpha(x) f\big)', \phi(x) > = < \alpha(x) f' + \alpha'(x) f, \phi >\,, \tag{1.34}$$

για τυχαία ελεγκτική συνάρτηση $\phi(x)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
< \big(\alpha(x) f\big)', \phi(x) > \;&=\; - < \alpha(x) f, \phi(x)' > \\
&=\; - < f, \alpha(x)\, \phi(x)' > \\
&=\; - < f, \alpha(x)\, \phi(x)' > - < f, \alpha'(x)\, \phi(x) > + < f, \alpha'(x)\, \phi(x) > \\
&=\; - < f, \big(\alpha(x)\, \phi(x)\big)' > + < f, \alpha'(x)\, \phi(x) > \\
&=\; \quad < f', \alpha(x)\, \phi(x) > + < f, \alpha'(x)\, \phi(x) > \\
&=\; \quad < \alpha(x) f', \phi(x) > + < \alpha'(x) f, \phi(x) > \\
&=\; \quad < \alpha(x) f' + \alpha'(x) f, \phi(x) >\,,
\end{aligned} \tag{1.35}$$

δηλαδή η σχέση (1.34) που θέλουμε να αποδείξουμε. Ειδικότερα, αν $\alpha(x) = c$ η σταθερή συνάρτηση, τότε η σχέση (1.33) δίνει

$$\big(c f\big)' = c f'\,. \tag{1.36}$$

Ας θυμηθούμε ότι $a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x)$ (δες σχέση (1.19)). Τότε έχουμε ότι

$$\big(a(x)\,\delta(x)\big)' = \big(a(0)\,\delta(x)\big)' = a(0)\,\delta'(x)\,, \tag{1.37}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση (1.36) με $c = a(0)$. Από την άλλη, από τον κανόνα παραγώγισης (1.33), έχουμε

$$\big(a(x)\,\delta(x)\big)' = a(x)\,\delta'(x) + a'(x)\,\delta(x) = a(x)\,\delta'(x) + a'(0)\,\delta(x)\,. \tag{1.38}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $a'(x)\delta(x) = a'(0)\delta(x)$. Τα αριστερά μέλη των σχέσεων (1.37) και (1.38) είναι ίσα, οπότε θα πρέπει και τα δεξιά μέλη να είναι ίσα, δηλαδή

$$a(0)\,\delta'(x) = a(x)\,\delta'(x) + a'(0)\,\delta(x)\,, \tag{1.39}$$

ή ισοδύναμα

$$a(x)\,\delta'(x) = a(0)\,\delta'(x) - a'(0)\,\delta(x)\,. \tag{1.40}$$

Αντικαθιστώντας $a(x) = x\,g(x)$ και $f = \delta'(x)$ στην σχέση (1.33) και χρησιμοποιώντας δυο φορές την σχέση (1.40) με κατάλληλο $a(x)$, ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει ότι ισχύει η σχέση

$$x\,g(x)\,\delta''(x) = 2\,g'(0)\delta(x) - 2\,g(0)\delta'(x)\,, \qquad \forall\, g(x) \in C^\infty(\mathbb{R})\,. \tag{1.41}$$

Μετά, ο αναγνώστης καλείται να αποδείξει την ισχύ της σχέσης (1.41), δίχως την χρήση της σχέσης (1.33).

1.5 Διαφορικές εξισώσεις κατανομών

Θεωρούμε τον διαφορικό τελεστή

$$L = a_n(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + a_{n-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)\,, \tag{1.42}$$

όπου οι συναρτήσεις $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$ είναι ομαλές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$, $a_i(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$. Όπως είδαμε παραπάνω υπάρχει κάθε τάξης παράγωγος μιας κατανομής f και επιπλέον μπορεί να ορισθεί ο πολλαπλασιασμός κατανομής με ομαλή συνάρτηση. Οπότε η κατανομή Lf ορίζεται και η δράση της σε τυχαία ελεγκτική συνάρτηση $\phi(x)$ δίνει

$$< Lf, \phi > = < \sum_{i=0}^{n} a_i f^{(i)}(x), \phi > = \sum_{i=0}^{n} < a_i f^{(i)}(x), \phi > = \sum_{i=0}^{n} < f^{(i)}(x), a_i\,\phi > = \tag{1.43}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i < f(x), \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\big(a_i\,\phi(x)\big) > = < f, \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\big(a_i\,\phi(x)\big) > = < f, L^*\phi > \;. \tag{1.44}$$

Ο διαφορικός τελεστής L^* που εισήχθηκε με την παραπάνω διαδικασία, λέγεται ο (τυπικός) συζυγής του τελεστή L και η δράση του σε τυχαία ομαλή συνάρτηση $g(x)$, ορίζεται από την σχέση

$$L^* g(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\big(a_i\,g(x)\big)\,. \tag{1.45}$$

Όταν έχουμε $L^* = L$ λέμε ότι ο L είναι (τυπικά) *αυτοσυζυγής*. Για παράδειγμα, ο συζυγής τελεστής του

$$L = a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)\,, \tag{1.46}$$

βρίσκεται από την σχέση (1.45), ως εξής

$$\begin{aligned} L^*g(x) &= (-1)^2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(a_2(x)\,g(x)\big) + (-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(a_1(x)\,g(x)\big) + a_0\,g(x) = \\ &= a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g(x) + \big(2\,a_2' - a_1\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x) + (a_2'' - a_1' + a_0)g(x)\,, \end{aligned} \tag{1.47}$$

οπότε

$$L^* = a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \big(2\,a_2' - a_1\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + (a_2'' - a_1' + a_0)\,, \tag{1.48}$$

Αν $a_2' = a_1$, τότε παρατηρούμε ότι

$$L = L^* = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_2\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + a_0\,, \tag{1.49}$$

και ο L στην περίπτωση αυτή είναι αυτοσυζυγής.

Θεωρούμε το σύνολο των ελεγκτικών συναρτήσεων που μηδενίζονται έξω από κάποιο κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ που περιέχεται σε ένα ανοικτό διάστημα Ω του $\mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό των συναρτήσεων το συμβολίζουμε με $C_0^\infty(\Omega)$. Θεωρούμε κατανομές u και f για τις οποίες θέλουμε να ισχύει

$$Lu = f\,, \qquad x \in \Omega\,, \tag{1.50}$$

δηλαδή οι κατανομές Lu και f να ταυτίζονται στο Ω. Η σχέση $< L\,u, \phi > = < u, L^*\phi >$ που ισχύει για κάθε κατανομή u, μας υποδεικνύει πότε η κατανομή u είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης κατανομών (1.50). Μια κατανομή u είναι λύση της (1.50) στο Ω αν και μόνο αν

$$< u, L^*\phi > = < f, \phi >\,, \qquad \forall\,\phi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.51}$$

Θεμελιώδεις Λύσεις

Όταν η f στην σχέση (1.50) είναι η κατανομή $\delta(x - x_0)$ του Dirac με πόλο στο x_0, τότε μια οποιαδήποτε κατανομή u που ικανοποιεί την σχέση (1.50), λέγεται **θεμελιώδης λύση** του L και την συμβολίζουμε με $F(x, x_0)$, για να δηλώσουμε την παραμετρική εξάρτησή της από τον πόλο x_0. Δηλαδή μια θεμελιώδης λύση του L είναι μια κατανομή $F(x, x_0)$ η οποία ικανοποιεί την σχέση

$$L\,F(x, x_0) = \delta(x - x_0)\,. \tag{1.52}$$

Από την σχέση (1.51) συνάγεται άμεσα ότι μια κατανομή $F(x, x_0)$ είναι θεμελιώδης λύση του L αν και μόνο αν

$$< F, L^*\phi > = \phi(x_0)\,, \qquad \forall\,\phi \in C_0^\infty(\Omega)\,. \tag{1.53}$$

2 Συναρτήσεις Green κι εφαρμογές τους στην επίλυση προβλημάτων συνοριακών τιμών σε μια διάσταση

Σε αυτό το εδάφιο θα μελετήσουμε προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) που αφορούν 2ης τάξης, γραμμικές συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ). Η επίλυση του δοσμένου ΠΣΤ θα γίνει μέσω της κατασκευής της λεγόμενης συνάρτησης Green. Οι συναρτήσεις Green είναι θεμελιώδεις λύσεις του διαφορικού τελεστή L, οι οποίες ικανοποιούν επιπλέον τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες του δοσμένου ΠΣΤ.

Πριν διατυπώσουμε το πρόβλημα, αναφέρουμε τον τύπο του Green ο οποίος θα μας χρειαστεί αρκετές φορές στην παρούσα διαπραγμάτευση. Θεωρούμε τον τελεστή L και τον συζυγή του τελεστή L^* που δίνονται από τις σχέσεις (1.46) και (1.48), αντίστοιχα. Ο **τύπος του Green** είναι ο εξής

$$\int_{x_0}^{x_1} v\, Lu \,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} u\, L^* v \,\mathrm{d}x = \left[a_2(v\,u' - u\,v') + (a_1 - a_2')\,u\,v\right]_{x=x_0}^{x=x_1}, \tag{2.1}$$

όπου u, v τυχαίες συναρτήσεις $u, v \in C^2(\mathbb{R})$. Ο τύπος (2.1) μπορεί να αποδειχτεί εύκολα με ολοκλήρωση κατά παράγοντες σε ένα από τα δύο ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο αριστερό μέλος της (2.1), έτσι ώστε ο όρος $v\, Lu$ να γίνει $u\, L^* v$, ή αντίστροφα. Οι όροι στο δεξί μέρος της (2.1) είναι ακριβώς οι "επιφανειακοί" όροι που εμφανίζονται στην διαδικασία της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες.

2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Θεωρούμε την 2ης τάξης, γραμμική ΣΔΕ που δίνεται από την σχέση

$$a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x)\,, \qquad x_0 < x < x_1\,, \tag{2.2}$$

όπου οι συντελεστές a_i είναι συνεχείς συναρτήσεις με $a_2(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [x_0, x_1]$, και $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο $[x_0, x_1]$. Η λύση $u(x)$ απαιτείται να ικανοποιεί τις εξής δύο συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned}
\Sigma_1\, u &\overset{\text{ορς}}{=} p_{11}u(x_0) + p_{12}u'(x_0) + q_{11}u(x_1) + q_{12}u'(x_1) = r_1\,,\\
\Sigma_2\, u &\overset{\text{ορς}}{=} p_{21}u(x_0) + p_{22}u'(x_0) + q_{21}u(x_1) + q_{22}u'(x_1) = r_2\,,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

όπου τα διάνυσμα $(p_{11}, p_{12}, q_{11}, q_{12})$ και $(p_{21}, p_{22}, q_{21}, q_{22})$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αναφέρουμε τα Σ_1 και Σ_1 ως τα *συνοριακά συναρτησιακά*, αφού αντιστοιχούν σε κάθε συνάρτηση $u(x)$ τους αριθμούς r_1 και r_2, σύμφωνα με τις σχέσεις (2.3), αντίστοιχα.

> Η ΣΔΕ (2.2) μαζί με τις συνοριακές συνθήκες που δίνονται από τις σχέσεις (2.3), απαρτίζουν ένα **πρόβλημα συνοριακών τιμών**.

Παρατηρήσεις

1. Θεωρούμε ότι οι συντελεστές $a_i(x)$ και p_{ij}, q_{ij}, είναι συγκεκριμένες συναρτήσεις και πραγματικοί αριθμοί, αντίστοιχα, και μας ενδιαφέρει η εξάρτηση της λύσης $u(x)$, σε σχέση με τα $f(x)$, r_1, r_2. Γι' αυτό αναφέρουμε την τριάδα $\{f; r_1, r_2\}$ ως τα δοσμένα του προβλήματος.
2. Αν $q_{11} = q_{12} = p_{21} = p_{22} = 0$ στις σχέσεις (2.3), τότε οι συνοριακές συνθήκες λέγονται *αμιγείς* (μια συνθήκη ανά άκρο x_0, x_1), δηλ.

$$\begin{aligned} \Sigma_1\, u &= p_{11}u(x_0) + p_{12}u'(x_0) = r_1\,, \\ \Sigma_2\, u &= q_{21}u(x_1) + q_{22}u'(x_1) = r_2\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Αν $p_{12} = q_{11} = q_{12} = p_{21} = q_{21} = q_{22} = 0$ και $p_{11} = p_{22} = 1$ στις σχέσεις (2.3) τότε έχουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ), με αρχικές συνθήκες $u(x_0) = r_1$, $u'(x_0) = r_2$.

2.2 Αρχή υπέρθεσης λύσεων

Λόγω της γραμμικότητας της ΣΔΕ (2.2) και των συνοριακών συνθηκών (2.3) ισχύει το εξής:

Αρχή υπέρθεσης λύσεων: Αν η u ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{f; r_1, r_2\}$ και η $\widetilde{u}$ ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{\widetilde{f}; \widetilde{r_1}, \widetilde{r_2}\}$ τότε η $Au + B\widetilde{u}$ ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{Af + B\widetilde{f}; A\,r_1 + B\,\widetilde{r_1}, A\,r_2 + B\,\widetilde{r_2}\}$, όπου A, B πραγματικοί αριθμοί.

Η αρχή υπέρθεσης λύσεων εκφράζει το γεγονός ότι γραμμικοί συνδυασμοί από μη-ομογένειες στη ΣΔΕ ή/και στις συνοριακές συνθήκες παράγουν γραμμικούς συνδυασμούς των λύσεων. Άμεση συνέπεια της αρχής υπέρθεσης λύσεων είναι ότι αν u και v ικανοποιούν το ΠΣΤ με τα ίδια δοσμένα $\{f; r_1, r_2\}$ τότε η $u - v$ ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{0; 0, 0\}$, δηλαδή το πλήρως ομογενές ΠΣΤ. Η τελευταία διαπίστωση μας οδηγεί στο το εξής σημαντικό

> **Κριτήριο μοναδικότητας λύσης**: *Αν το ΠΣΤ με δοσμένα $\{0; 0, 0\}$ έχει μόνο την μηδενική λύση, τότε το ΠΣΤ με δοσμένα $\{f; r_1, r_2\}$ έχει το πολύ μία λύση. Αν το ΠΣΤ με δοσμένα $\{0; 0, 0\}$ έχει μια μη-μηδενική λύση, τότε το ΠΣΤ με δοσμένα $\{f; r_1, r_2\}$ ή δεν έχει λύση ή έχει περισσότερες από μια λύσεις.*

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι το ΠΣΤ με δοσμένα $\{0; 0, 0\}$ έχει μόνο την μηδενική λύση.

Θα καθορίσουμε την μια και μοναδική λύση του ΠΣΤ με δοσμένα $\{f; r_1, r_2\}$, μέσω της αναλυτικής κατασκευής της συνάρτησης Green $G(x, y)$.

2.3 Συναρτήσεις Green

Ορισμός. Η συνάρτηση Green $G(x,y)$ του ΠΣΤ που απαρτίζεται από τις σχέσεις (2.2) και (2.3) είναι η λύση του ΠΣΤ με δοσμένα $\{\delta(x-y);0,0\}$, με $x_0<x,y<x_1$. Συγκεκριμένα, αν στην ΣΔΕ (2.2) συμβολίσουμε με L τον διαφορικό τελεστή

$$L=a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+a_0(x)\,,$$

η $G(x,y)$ είναι η θεμελιώδης λύση του L που ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες $\Sigma_1 G=\Sigma_2 G=0$, δηλαδή

$$L\,G(x,y)=\delta(x-y)\,,\quad x_0<x,y<x_1\,,\qquad \Sigma_1 G=\Sigma_2 G=0\,. \tag{2.5}$$

Αρχικά παρουσιάζουμε την αναλυτική κατασκευή της συνάρτησης Green για δυο ειδικές περιπτώσεις ΠΣΤ, τα οποία έχουν ξεχωριστό ενδιαφέρον από τη άποψη των επιμέρους εφαρμογών, και ακολουθεί η κατασκευή της συνάρτησης Green για το ΠΣΤ (2.2), (2.3), δηλαδή για την πιο γενική περίπτωση συνοριακών συνθηκών.

Α. Κατασκευή της συνάρτησης Green για αμιγείς συνοριακές συνθήκες:

Θα κατασκευάσουμε την λύση του προβλήματος

$$a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,y)+a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,y)+a_0(x)G(x,y)=\delta(x-y)\,, \tag{2.6}$$

με τις συνοριακές συνθήκες (2.4), που για ευκολία τις γράφουμε πάλι εδώ

$$\begin{aligned}\Sigma_1\,u&=p_{11}G(x_0,y)+p_{12}G'(x_0,y)=0\,,\\ \Sigma_2\,u&=q_{21}G(x_1,y)+q_{22}G'(x_1,y)=0\,.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Βήμα 1ο. Αρχικά, παρατηρούμε ότι στα διαστήματα $x_1\geq x>y$ και $x_0\leq x<y$ η συνάρτηση Green $G(x,y)$ ικανοποιεί την ΣΔΕ $L\,G(x,y)=0$ οπότε η μορφή της $G(x,y)$ είναι

$$G(x,y)=\begin{cases} c_1u_1(x)+c_2u_2(x)\,, & x_1\geq x>y\,,\\ c_3u_1(x)+c_4u_2(x)\,, & x_0\leq x<y\,,\end{cases} \tag{2.8}$$

όπου $u_1(x),u_2(x)$ είναι οι δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ΣΔΕ $L\,u=0$ και c_1,c_2 είναι δυο αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Βήμα 2ο. Επιβάλλουμε στην $G(x,y)$ τις συνοριακές συνθήκες $\Sigma_1 G=0$ και $\Sigma_2 G=0$, αντίστοιχα. Η Σ_1 αφορά τις τιμές της G και G' στο σημείο $x=x_0$, το οποίο περιέχεται στον κάτω κλάδο της $G(x,y)$ που δίνεται από τη σχέση (2.8). Αναλυτικά, η $\Sigma_1 G$ δίνει

$$p_{11}\big(c_3u_1(x_0)+c_4u_2(x_0)\big)+p_{12}\big(c_3u_1'(x_0)+c_4u_2'(x_0)\big)=0\,. \tag{2.9}$$

Επειδή δεν μπορεί ταυτόχρονα $p_{11} = p_{12} = 0$, και επειδή οι u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ΣΔΕ $L\,u = 0$, από την σχέση (2.9) συμπεραίνουμε ότι οι παράμετροι c_3, c_4 έχουν αναγκαστικά γραμμική εξάρτηση μεταξύ τους, δηλαδή

$$c_3 = \lambda\, c_4\,, \qquad \text{ή} \qquad c_4 = \lambda\, c_3\,,$$

όπου ο πραγματικός αριθμός λ καθορίζεται πλήρως από τις τιμές $u_1(x_0), u_2(x_0), u_1'(x_0), u_2'(x_0)$. Ακριβώς ίδιες διαπιστώσεις ισχύουν και για τις σταθερές c_1, c_2 μετά την επιβολή της συνθήκης $\Sigma_2 G$, η οποία αφορά το σημείο $x = x_1$ που περιέχεται στον πάνω κλάδο της $G(x, y)$. Οπότε σε κάθε περίπτωση η $G(x, y)$ μετά την επιβολή των συνοριακών συνθηκών $\Sigma_1 G = \Sigma_2 G = 0$ παίρνει την μορφή

$$G(x,y) = \begin{cases} A\, U_1(x)\,, & x_1 \geq x > y\,, \\ B\, U_2(x)\,, & x_0 \leq x < y\,. \end{cases} \tag{2.10}$$

Οι συναρτήσεις U_1, U_2 είναι πλήρως καθορισμένες συναρτήσεις του x που ικανοποιούν την $L\,U = 0$ και επιπλέον *είναι γραμμικώς ανεξάρτητες* γιατί από την υπόθεση το πλήρως ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την μηδενική λύση. Οι A, B είναι αυθαίρετες σταθερές οι οποίες θα καθορισθούν από τις εξής δυο συνθήκες:

(1) Η $G(x, y)$ είναι συνεχής στο σημείο $x = y$.

(2) Η $G(x, y)$ ικανοποιεί την $L\,G(x, y) = \delta(x - y)$.

Βήμα 3ο. Επιβάλλουμε η $G(x, y)$ να είναι συνεχής στο σημείο $x = y$ και συνεπώς έχουμε

$$A\, U_1(y) - B\, U_2(y) = 0\,. \tag{2.11}$$

Βήμα 4ο. Για να έχουμε $L\,G(x, y) = \delta(x - y)$, δεδομένου ότι ο διαφορικός τελεστής L είναι 2ης τάξης, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $G(x, y)$ πρέπει να έχει ασυνέχεια στην πρώτη παράγωγο ως προς x. Το ύψος της ασυνέχειας της παραγώγου έτσι ώστε $L\,G(x, y) = \delta(x-y)$, βρίσκεται ως εξής: Υπολογίζουμε πρώτα την πρώτη παράγωγο της $G(x, y)$ ως προς x και έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x,y) = \begin{cases} A\, U_1'(x)\,, & x_1 \geq x > y > x_0\,, \\ B\, U_2'(x)\,, & x_0 \leq x < y < x_1\,, \end{cases} \tag{2.12}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x,y) = \begin{cases} B\, U_2'(x)\,, & x_1 \geq x > y > x_0\,, \\ B\, U_2'(x)\,, & x_0 \leq x < y < x_1\,, \end{cases} + \begin{cases} A\, U_1'(x) - B\, U_2'(x)\,, & x_1 \geq x > y > x_0\,, \\ 0\,, & x_0 \leq x < y < x_1\,, \end{cases}$$

η οποία χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του Heaviside γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x,y) = B\, U_2'(x) + \big(A\, U_1'(x) - B\, U_2'(x)\big) H(x-y)\,.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε την δεύτερη παράγωγο της $G(x, y)$ ως προς x. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα παραγώγισης του Leibnitz και φέρνοντας στη μνήμη μας ότι $H'(x - y) = \delta(x - y)$, έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} G(x,y) = B\, U_2''(x) + \big(A\, U_1''(x) - B\, U_2''(x)\big) H(x-y) + \big(A\, U_1'(x) - B\, U_2'(x)\big) \delta(x-y)\,,$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,y) = \begin{cases} A\,U_1''(x)\,, & x_1 \geq x > y > x_0\,, \\ B\,U_2''(x)\,, & x_0 \leq x < y < x_1\,, \end{cases} + \big(A\,U_1'(x) - B\,U_2'(x)\big)\,\delta(x-y)\,. \tag{2.13}$$

Σχηματίζουμε τώρα την διαφορική εξίσωση $L\,u = \delta(x-y)$, που αναλυτικά είναι

$$a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}G(x,y) + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,y) + a_0(x)G(x,y) = \delta(x-y)\,. \tag{2.14}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.10), (2.12) και (2.13) στην (2.14), η τελευταία γίνεται (από το δεξί μέρος προς το αριστερό)

$$\delta(x-y) = \begin{cases} A\,\big(L\,U_1(x)\big)\,, & x_1 \geq x > y > x_0\,, \\ B\,\big(L\,U_2(x)\big)\,, & x_0 \leq x < y < x_1\,, \end{cases} + a_2(x)\big(A\,U_1'(x) - B\,U_2'(x)\big)\,\delta(x-y)\,. \tag{2.15}$$

Επειδή όμως $L\,U_1 = L\,U_2 = 0$ και $g(x)\,\delta(x-y) = g(y)\,\delta(x-y)$, η σχέση (2.15) γίνεται

$$\delta(x-y) = a_2(y)\big(A\,U_1'(y) - B\,U_2'(y)\big)\,\delta(x-y)\,, \tag{2.16}$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει

$$a_2(y)\big(A\,U_1'(y) - B\,U_2'(y)\big) = 1\,. \tag{2.17}$$

Οι εξισώσεις (2.11) και (2.17), τις οποίες για ευκολία τις ξαναγράφουμε πάλι εδώ

$$A\,U_1(y) - B\,U_2(y) = 0\,, \tag{2.18}$$

$$A\,U_1'(y) - B\,U_2'(y) = \frac{1}{a_2(y)}\,, \tag{2.19}$$

αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα ως προς τις παραμέτρους A, B, το οποίο έχει μοναδική λύση, επειδή οι συναρτήσεις U_1 και U_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Λύνοντας τις (2.18) (2.19) ως προς A, B βρίσκουμε εύκολα ότι

$$A = \frac{U_2(y)}{a_2(y)\,W(U_1, U_2; y)}\,, \qquad B = \frac{U_1(y)}{a_2(y)\,W(U_1, U_2; y)}\,, \tag{2.20}$$

όπου $W(U_1, U_2; x)$ είναι η ορίζουσα Wronski των U_1, U_2 δηλαδή

$$W(U_1, U_2; x) = U_1'(x)\,U_2(x) - U_1(x)\,U_2'(x)\,. \tag{2.21}$$

Οπότε θέτοντας τα A, B που βρήκαμε προηγουμένως στην σχέση (2.10), η συνάρτηση Green παίρνει τη τελική μορφή

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{U_1(x)\,U_2(y)}{a_2(y)\,W(U_1, U_2; y)}\,, & x_1 \geq x > y > x_0\,, \\[2ex] \dfrac{U_1(y)\,U_2(x)}{a_2(y)\,W(U_1, U_2; y)}\,, & x_0 \leq x < y < x_1\,. \end{cases} \tag{2.22}$$

Β. Κατασκευή της συνάρτησης Green για αρχικές συνθήκες:

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Green ικανοποιεί το ακόλουθο ΠΑΤ

$$L\,G(x,y) = \delta(x-y)\,, \quad -\infty < y < x < \infty\,, \quad G(x,y)|_{x=y} = G'(x,y)|_{x=y} = 0\,. \tag{2.23}$$

Η συνάρτηση Green, γνωστή και ως *αιτιώδης θεμελιώδης λύση*, είναι η

$$G(x,y) = H(x-y)\,u_G(x;y)\,, \tag{2.24}$$

όπου $u_G(x;y)$ είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ

$$L\,u_G(x;y) = 0\,, \quad -\infty < y < x < \infty\,, \quad u_G(x;y)|_{x=y} = 0\,, \quad u'_G(x;y)|_{x=y} = 1/a_2(y)\,. \tag{2.25}$$

Για λόγους πληρότητας θα δείξουμε ότι πράγματι η $G(x,y)$ που δίνεται από την σχέση (2.24) ικανοποιεί το ΠΑΤ (2.23). Για να ισχύει ότι $L\,G(x,y) = \delta(x-y)$, αρκεί να δείξουμε ότι για τυχαία ελεγκτική συνάρτηση $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, ισχύει ότι

$$< G, L^*\phi >= \phi(y)\,, \tag{2.26}$$

(δες σχέση (1.53)). Έχουμε

$$< G, L^*\phi >= \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y)\,u_G(x;y)\,\big(L^*\phi(x)\big)\mathrm{d}x = \int_{y}^{\infty} u_G(x;y)\,\big(L^*\phi(x)\big)\mathrm{d}x\,. \tag{2.27}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Green, το δεξί μέλος της (2.27) γίνεται

$$\int_{y}^{\infty} u_G(x;y)\,\big(L^*\phi(x)\big)\mathrm{d}x = \int_{y}^{\infty} \big(L\,u_G(x;y)\big)\phi(x)\mathrm{d}x - \Big[J\big(u_G(x;y),\phi(x)\big)\Big]_{x=y}^{x=\infty}\,, \tag{2.28}$$

όπου

$$J\big(u_G,\phi\big) = a_2(\phi\,u'_G - u_G\,\phi') + (a_1 - a'_2)\,u_G\,\phi\,. \tag{2.29}$$

Όμως επειδή $Lu_G(x;y) = 0$, το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος στην σχέση (2.28) μηδενίζεται. Επιπλέον, επειδή η $\phi(x)$ είναι ελεγκτική συνάρτηση, η ϕ και οι παράγωγοι $\phi^{(k)}$ οποιασδήποτε τάξης, μηδενίζονται έξω από ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$. Οπότε η τιμή της $J\big(u_G,\phi\big)$ υπολογισμένη στο $x=\infty$ είναι μηδέν και στο δεξί μέλος της σχέσης (2.28) επιζεί μόνο η τιμή της $J\big(u_G,\phi\big)$ υπολογισμένη στο $x=y$. Από το γεγονός ότι η $u_G(x;y)$ ικανοποιεί το ΠΑΤ (2.23), έχουμε ότι $u_G(y,y) = 0$ και $u_G(y,y) = 1/a_2(y)$. Συνεπώς η $J\big(u_G,\phi\big)$ υπολογισμένη στο $x=y$ δίνει

$$J\big(u_G(y,y),\phi(y)\big) = a_2(y)\phi(y)\,\frac{1}{a_2(y)} = \phi(y)\,,$$

και επανερχόμενοι στην αφετηρία της ανάλυσης που προηγήθηκε έχουμε ότι

$$< G, L^*\phi >= \phi(y)\,,$$

το οποίο είναι ακριβώς αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Επιπλέον, η $G(x;y)$ που δίνεται από τη σχέση (2.24) ικανοποιεί τις ομογενείς αρχικές-συνοριακές συνθήκες. Πράγματι, εύκολα συμπεραίνουμε ότι $G(y,y)=0$, και παραγωγίζοντας την σχέση (2.24) ως προς x έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x,y) &= \delta(x-y)\,u_G(x;y)+H(x-y)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_G(x;y)\\
&= \delta(x-y)\,u_G(y;y)+H(x-y)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_G(x;y)\\
&= H(x-y)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_G(x;y)\,.
\end{aligned}$$

Επειδή $H(0)=0$, τότε και $G'(y,y)=0$.

Γ. Κατασκευή της συνάρτησης Green για γενικές συνοριακές συνθήκες:

Θα κατασκευάσουμε εδώ την λύση του ΠΣΤ (2.5). Γνωρίζουμε από τα αμέσως προηγούμενα ότι η αιτιώδης θεμελιώδης λύση ικανοποιεί την ΣΔΕ του ΠΣΤ (2.5), αλλά όμως, γενικά, δεν ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες. Για να βρούμε την συνάρτηση Green που ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες του ΠΣΤ (2.5) χρησιμοποιούμε την αρχή υπέρθεσης λύσεων και γράφουμε την λύση του ΠΣΤ (2.5) ως την παρακάτω γραμμική υπέρθεση

$$G(x,y)=H(x-y)u_G(x;y)+A\,u_1(x)+B\,u_2(x)\,,\qquad x_0<x,y<x_1\,, \tag{2.30}$$

όπου u_1 και u_2 είναι δυο μη-τετριμμένες λύσεις της ΣΔΕ $L\,u=0$, που ικανοποιούν τις συνθήκες $\Sigma_1 u_1=0$ και $\Sigma_2 u_2=0$, αντίστοιχα. Προφανώς για την $G(x;y)$ που δίνεται από την σχέση (2.30) έχουμε ότι

$$L\,G(x,y)=L\Big(H(x-y)u_G(x;y)\Big)+A\,L\,u_1+B\,L\,u_2=\delta(x-y)\,. \tag{2.31}$$

Επιπλέον, αναλύοντας κατά κλάδους την $G(x;y)$, που δίνεται από την σχέση (2.30), η τελευταία παίρνει την μορφή

$$G(x,y)=\begin{cases} u_G(x;y)+A\,u_1(x)+B\,u_2(x)\,, & x_1\geq x>y>x_0\,,\\ A\,u_1(x)+B\,u_2(x)\,, & x_0\leq x<y<x_1\,. \end{cases} \tag{2.32}$$

Επιβάλλοντας στην $G(x,y)$ τις συνοριακές συνθήκες $\Sigma_1\,G(x,y)=\Sigma_2\,G(x,y)=0$, βρίσκουμε ότι θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned}
q_{11}\,u_G(x_1;y)+q_{12}\,u_G'(x_1;y)+B\,\Sigma_1\,u_2=0\,,\\
q_{21}\,u_G(x_1;y)+q_{22}\,u_G'(x_1;y)+A\,\Sigma_2\,u_1=0\,.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Στην παραπάνω σχέση

$$\begin{aligned}
\Sigma_1\,u_2=p_{11}u_2(x_0)+p_{12}u_2'(x_0)+q_{11}u_2(x_1)+q_{12}u_2'(x_1)\,,\\
\Sigma_2\,u_1=p_{21}u_1(x_0)+p_{22}u_1'(x_0)+q_{21}u_1(x_1)+q_{22}u_1'(x_1)\,,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

και έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η u_1 ικανοποιεί την συνθήκη $\Sigma_1 u_1 = 0$ και αντίστοιχα η u_2 ικανοποιεί την συνθήκη $\Sigma_2 u_2 = 0$. Αφού θα πρέπει $\Sigma_1 u_2 \neq 0$ και $\Sigma_2 u_1 \neq 0$ (από την υπόθεση ότι το πλήρως ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την μηδενική λύση) μπορούμε να λύσουμε το σύστημα (2.33) ως προς A, B και να προσδιορίσουμε πλήρως την συνάρτηση Green στην σχέση (2.30).

Παρατηρήσεις:

1. Η $G(x,y)$ που δίνεται από τη σχέση (2.30) είναι αυτόματα συνεχής στο $x = y$.

2. Το άκρο $x = x_1$ βρίσκεται στον πάνω κλάδο της $G(x,y)$ στη σχέση (2.30) και γι ’ αυτό το λόγο εμφανίζονται μόνο οι τιμές $u_G(x_1;y)$ και $u'_G(x_1;y)$ στο σύστημα (2.33), σε αντιδιαστολή με το άκρο $x = x_0$ που βρίσκεται στον κάτω κλάδο της $G(x,y)$.

3. Σε πολλά ΠΣΤ με γενικές (μικτές) συνοριακές συνθήκες είναι προτιμότερο από υπολογιστικής άποψης να κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green εφαρμόζοντας τα βήματα κατασκευής της που παραθέσαμε για την περίπτωση των αμιγών συνοριακών συνθηκών, τροποποιώντας βέβαια το κάθε βήμα κατάλληλα.

3. Η περίπτωση των γενικών συνοριακών συνθηκών περιλαμβάνει και αυτήν των αμιγών συνοριακών συνθηκών. Οπότε η μέθοδος κατασκευής της συνάρτησης Green μέσω της εύρεσης της αιτιώδους θεμελιώδους λύσης μπορεί να εφαρμοσθεί και για την περίπτωση των αμιγών συνοριακών συνθηκών. Όποιον κι από τους δυο τρόπους ακολουθήσει κανείς θα οδηγηθεί στην μια και μοναδική συνάρτηση Green, με την προϋπόθεση βέβαια ότι το πλήρως ομογενές ΠΣΤ έχει μόνο την μηδενική λύση.

2.4 Παραδείγματα συναρτήσεων Green

Παράδειγμα 1ο: Αμιγείς συνοριακές συνθήκες

Μας ζητείται να κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$u''(x) = f(x)\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u(0) - u'(0) = r_1\,, \qquad u(1) - u'(1) = r_2\,. \tag{2.35}$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, οι συντελεστές του τελεστή L είναι

$$a_2(x) = 1\,, \qquad a_1(x) = a_0(x) = 0\,,$$

και οι συντελεστές στις συνοριακές συνθήκες είναι

$$p_{11} = -p_{12} = 1\,, \quad q_{21} = -q_{22} = 1\,, \quad p_{21} = p_{22} = q_{11} = q_{12} = 0\,.$$

Το πλήρως ομογενές ΠΣΤ είναι το

$$u''(x) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u(0) - u'(0) = 0\,, \qquad u(1) - u'(1) = 0\,.$$

Η γενική λύση της $u''(x) = 0$ είναι η $u(x) = k_1 + k_2\,x$ και επιβάλλοντας τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες $u(0) = u'(0) = 0$, $u(1) = u'(1)$ συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει $k_1 =$

$k_2 = 0$. Οπότε το πλήρως ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την μηδενική λύση, και συνεπώς η συνάρτηση Green υπάρχει και είναι μοναδική.
Από το ορισμό, η συνάρτηση Green ικανοποιεί το παρακάτω ΠΣΤ

$$\begin{aligned} G''(x,y) &= \delta(x-y)\,, \qquad 0 < x, y < 1\,, \\ G(0,y) - G'(0,y) = 0\,, &\qquad G(1,y) - G'(1,y) = 0\,. \end{aligned} \tag{2.36}$$

όπου το y το θεωρούμε ως παράμετρο και ως συνήθως ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς την μεταβλητή x.
Πρώτος τρόπος: Θα ακολουθήσουμε τα βήματα που αφορούν τις αμιγείς συνοριακές συνθήκες αφού οι συνοριακές συνθήκες είναι μια για το κάθε άκρο $x = 0$ και $x = 1$, ξεχωριστά.
Βήμα 1ο. Δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ΣΔΕ $u''(x) = 0$, είναι οι $u_1(x) = 1$ και $u_2(x) = x$. Οπότε η $G(x, y)$ έχει την αρχική μορφή

$$G(x,y) = \begin{cases} c_1 + c_2\,x\,, & 1 \geq x > y\,, \\ c_3 + c_4 x\,, & 0 \leq x < y\,. \end{cases} \tag{2.37}$$

Βήμα 2ο. Επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες παρατηρώντας ότι το άκρο $x = 0$ βρίσκεται στον κάτω κλάδο της $G(x, y)$ και αντίστοιχα το $x = 1$ βρίσκεται στον πάνω. Οπότε έχουμε

$$\left.\begin{aligned} G(0,y) = G'(0,y) \\ G(1,y) = G'(1,y) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_3 = c_4 \\ c_1 + c_2 = c_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_3 = c_4 \\ c_1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας $c_1 = 0$ και $c_3 = c_4$, η συνάρτηση Green (2.37) γίνεται

$$G(x,y) = \begin{cases} c_2 x\,, & 1 \geq x > y\,, \\ c_4(1+x)\,, & 0 \leq x < y\,, \end{cases} \tag{2.38}$$

Συγκρίνοντας την πιο πάνω σχέση με την σχέση (2.10) έχουμε ότι $U_1 = x$, $U_2 = x + 1$, οι οποίες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αφού η ορίζουσα Wronski είναι διάφορη του μηδενός, πράγματι

$$W(U_1, U_2; x) = 1\,(x+1) - 1\,x = 1 \neq 0\,.$$

Βήμα 3ο και 4ο. Λύνουμε το γραμμικό σύστημα (2.18), (2.19), που προκύπτει μετά την αντικατάσταση $U_1 = x$, $U_2 = x + 1$, όπου βέβαια $a_2(x) = 1$. Αναλυτικά, έχουμε ότι οι σταθερές c_2 και c_4 ικανοποιούν το γραμμικό σύστημα

$$\left.\begin{aligned} c_2 y - c_4(y+1) = 0 \\ c_2 - c_4 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (c_2 - c_4)y = c_4 \\ c_2 - c_4 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} y = c_4 \\ c_2 - c_4 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} c_4 &= y \\ c_2 &= 1 + y \end{aligned}\right\}$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις σταθερές c_2 και c_4 που μόλις βρήκαμε στην σχέση (2.38), η συνάρτηση Green είναι

$$G(x,y) = \begin{cases} x(y+1)\,, & 1 \geq x > y\,, \\ y(1+x)\,, & 0 \leq x < y\,. \end{cases} \tag{2.39}$$

Δεύτερος τρόπος: Θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green μέσω της εύρεσης της αιτιώδους θεμελιώδους λύσης $g(x,y)$, η οποία είναι η λύση του ΠΑΤ

$$g''(x,y) = \delta(x-y)\,, \qquad 0 < y < x < 1\,, \qquad g(y,y) = g'(y,y) = 0\,. \tag{2.40}$$

Όπως αποδείξαμε στο αντίστοιχο εδάφιο η λύση αυτή δίνεται από την τύπο

$$g(x,y) = H(x-y)\, u_g(x;y)\,,$$

όπου, για το συγκεκριμένο παράδειγμα, η συνάρτηση $u_g(x;y)$ ικανοποιεί το ακόλουθο ΠΑΤ

$$u_g''(x,y) = 0\,, \qquad 0 < y < x < 1\,, \qquad u_g(y,y) = 0\,, \quad u_g'(y,y) = 1\,.$$

Η ΣΔΕ $u_g''(x,y) = 0$ λύνεται εύκολα και έχει γενική λύση

$$u_g(x;y) = c_1 + c_2\, x\,.$$

Επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες $u_g(y,y) = 0$, $u_g'(y,y) = 1$, οι σταθερές c_1, c_2 προσδιορίζονται πλήρως και είναι $c_1 = -y$, $c_2 = 1$. Οπότε

$$u_g(x;y) = x - y\,. \tag{2.41}$$

Συνεπώς, η συνάρτηση Green είναι της μορφής

$$G(x,y) = H(x-y)\,(x-y) + A\, u_1(x) + B\, u_2(x)\,, \tag{2.42}$$

όπου οι u_1 και u_2 είναι δυο μη-τετριμμένες λύσεις της ΣΔΕ $u''(x) = 0$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $u_1(0) = u_1'(0)$ και $u_2(1) = u_2'(1)$, αντίστοιχα. Εύκολα βρίσκουμε ότι δυο τέτοιες λύσεις είναι οι $u_1(x) = x + 1$ και $u_2(x) = x$. Οπότε, έχουμε ότι

$$\Sigma_1\, u_2(x) = u_2(0) - u_2'(0) = -1\,, \qquad \Sigma_2\, u_1(x) = u_1(1) - u_1'(1) = 1\,.$$

Επιπλέον, για την $u_g(x;y)$ που δίνεται από τη σχέση (2.41) έχουμε ότι $u_g(1;y) = 1 - y$ και $u_g'(1;y) = 1$. Οπότε αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα στο σύστημα (2.33), το τελευταίο παίρνει την μορφή

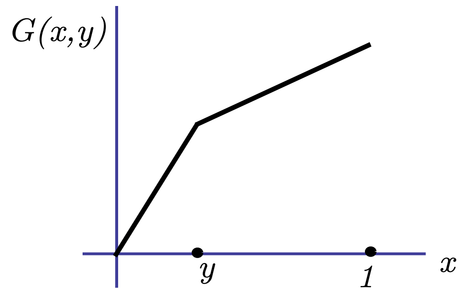
$$\left.\begin{aligned} q_{11}\, u_G(x_1;y) + q_{12}\, u_G'(x_1;y) + B\,\Sigma_1\, u_2 = 0\,, \\ q_{21}\, u_G(x_1;y) + q_{22}\, u_G'(x_1;y) + A\,\Sigma_2\, u_1 = 0\,, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} B = 0\,, \\ A = y\,. \end{aligned}\right\}$$

Αντικαθιστώντας τα A, B που μόλις βρήκαμε στην (2.42), η συνάρτηση Green είναι η

$$G(x,y) = H(x-y)\,(x-y) + y(x+1)\,, \tag{2.43}$$

ή αναλύοντάς την κατά κλάδους παίρνουμε

$$G(x,y) = \begin{cases} x - y\,, & 1 \geq x > y\,, \\ 0\,, & 0 \leq x < y\,, \end{cases} + \begin{cases} y(x+1)\,, & 1 \geq x > y\,, \\ y(x+1)\,, & 0 \leq x < y\,, \end{cases} = \begin{cases} x(y+1)\,, & 1 \geq x > y\,, \\ y(x+1)\,, & 0 \leq x < y\,, \end{cases}$$



Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της $G(x, y)$ που δίνεται από την σχέση (2.39).

που είναι ακριβώς η συνάρτηση Green (2.39) που βρήκαμε με τον πρώτο τρόπο (δεν θα μπορούσε να ήταν διαφορετική άλλωστε αφού είναι μία και μοναδική !).

Παράδειγμα 2ο : Μικτές συνοριακές συνθήκες

Στο παράδειγμα αυτό μας ζητείται να κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green για το ΠΣΤ

$$u''(x) = f(x)\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u'(0) - u(1) = r_1\,, \qquad u'(1) = r_2\,.$$

Οι συντελεστές του τελεστή L είναι

$$a_2(x) = 1 \qquad a_1(x) = a_0(x) = 0\,,$$

και οι συντελεστές των συνοριακών συνθηκών είναι

$$p_{12} = -q_{11} = q_{22} = 1\,, \quad p_{11} = p_{21} = p_{22} = q_{12} = q_{21} = 0\,. \tag{2.44}$$

Το πλήρως ομογενές ΠΣΤ είναι το

$$u''(x) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u'(0) - u(1) = 0\,, \qquad u'(1) = 0\,.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το πιο πάνω πλήρως ομογενές πρόβλημα έχει μόνο την μηδενική λύση, και συνεπώς η συνάρτηση Green υπάρχει και είναι μοναδική.
Από το ορισμό, η συνάρτηση Green ικανοποιεί το παρακάτω ΠΣΤ

$$\begin{gathered} G''(x,y) = \delta(x-y)\,, \qquad 0 < x, y < 1\,, \\ G'(0,y) - G(1,y) = 0\,, \qquad G'(1,y) = 0\,. \end{gathered} \tag{2.45}$$

Πρόκειται για ένα ΠΣΤ όπου οι συνοριακές συνθήκες είναι μικτές, δηλαδή εμπλέκουν τιμές της $G(x, y)$ και της παραγώγου της $G'(x, y)$ και στα δύο άκρα. Αρχικά θα ακολουθήσουμε τα βήματα κατασκευής της συνάρτησης Green που αφορούν τις αμιγείς συνοριακές συνθήκες έστω κι αν οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι αυτού του τύπου, φυσικά εφαρμόζοντας κατάλληλες τροποποιήσεις. Έπειτα θα εφαρμόσουμε την μέθοδο κατασκευής της συνάρτησης Green μέσω της εύρεσης της αιτιώδους θεμελιώδους λύσης.

<u>*Πρώτος τρόπος:*</u>

Βήμα 1ο. Δυο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ΣΔΕ $u''(x) = 0$, είναι οι $u_1(x) = 1$ και $u_2(x) = x$. Οπότε η $G(x, y)$ έχει την αρχική μορφή

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1 + c_2\, x\,, & 1 \geq x > y\,, \\ c_3 + c_4\, x\,. & 0 \leq x < y\,, \end{cases} \tag{2.46}$$

Βήμα 2ο. Επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες παρατηρώντας ότι το άκρο $x = 0$ βρίσκεται στον κάτω κλάδο της $G(x, y)$ και αντίστοιχα το $x = 1$ βρίσκεται στον πάνω. Οπότε έχουμε

$$\left.\begin{matrix} G'(0, y) = G(1, y) \\ G'(1, y) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_4 = c_1 + c_2 \\ c_2 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} c_4 = c_1 \\ c_2 = 0 \end{matrix}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας $c_2 = 0$ και $c_4 = c_1$, η συνάρτηση Green (2.46) γίνεται

$$G(x, y) = \begin{cases} c_1 & 1 \geq x > y\,, \\ c_3 + c_1\, x\,. & 0 \leq x < y\,, \end{cases} \tag{2.47}$$

Βήμα 3ο. Επειδή η συνάρτηση Green πρέπει να είναι συνεχής στο σημείο $x = y$ έχουμε ότι

$$c_1 = c_3 + c_1\, y \Rightarrow c_3 = c_1(1 - y)\,. \tag{2.48}$$

Βήμα 4ο. Το ύψος της ασυνέχειας της πρώτης παραγώγου έτσι ώστε $G''(x, y) = \delta(x - y)$, βρίσκεται ως εξής: Υπολογίζουμε πρώτα την πρώτη παράγωγο της $G(x, y)$ ως προς x και έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x, y) = \begin{cases} 0\,, & x_1 \geq x > y\,, \\ c_1\,, & x_0 \leq x < y\,, \end{cases} \tag{2.49}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x, y) = \begin{cases} c_1\,, & 1 \geq x > y\,, \\ c_1\,, & 0 \leq x < y\,, \end{cases} - \begin{cases} c_1\,, & 1 \geq x > y\,, \\ 0\,, & 0 \leq x < y\,. \end{cases}$$

Η τελευταία σχέση χρησιμοποιώντας την συνάρτηση του Heaviside γράφεται

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x, y) = c_1 - c_1\, H(x - y)\,.$$

Στη συνέχεια παίρνουμε την δεύτερη παράγωγο της $G(x, y)$ ως προς x και έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} G(x, y) = -c_1\, \delta(x - y)\,.$$

Οπότε για να ισχύει $G''(x, y) = \delta(x - y)$ θα πρέπει $c_1 = -1$ και άρα στην (2.48) θα πρέπει $c_3 = y - 1$. Αντικαθιστώντας τις τιμές των c_1, c_3 που μόλις βρήκαμε στην (2.47) έχουμε ότι η συνάρτηση Green είναι η

$$G(x, y) = \begin{cases} -1 & 1 \geq x > y\,, \\ y - x - 1\,, & 0 \leq x < y\,. \end{cases} \tag{2.50}$$

Δεύτερος τρόπος: Θα κατασκευάσουμε την συνάρτηση Green μέσω της εύρεσης της αιτιώδους θεμελιώδους λύσης $g(x, y)$, η οποία είναι η ίδια με αυτή που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, δηλαδή

$$g(x, y) = H(x - y)(x - y)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση Green είναι της μορφής

$$G(x, y) = H(x - y)\,(x - y) + A\,u_1(x) + B\,u_2(x) \tag{2.51}$$

όπου οι u_1 και u_2 είναι δυο μη-τετριμμένες λύσεις της ΣΔΕ $u''(x) = 0$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $u_1'(0) = u_1(1)$ και $u_2'(1) = 0$, αντίστοιχα. Εύκολα βρίσκουμε ότι δυο τέτοιες λύσεις είναι οι $u_1(x) = x$ και $u_2(x) = 1$. Οπότε, έχουμε ότι

$$\Sigma_1\,u_2(x) = u_2'(0) - u_2(1) = -1\,, \qquad \Sigma_2\,u_1(x) = u_1'(1) = 1\,.$$

Επιπλέον, για την $u_g(x; y) = x - y$ (δες προηγούμενο παράδειγμα) έχουμε ότι $u_g(1; y) = 1 - y$ και $u_g'(1; y) = 1$. Οπότε αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα στο σύστημα (2.33), το τελευταίο παίρνει την μορφή

$$\left.\begin{array}{l} q_{11}\,u_g(x_1; y) + q_{12}\,u_g'(x_1; y) + B\,\Sigma_1\,u_2 = 0\,, \\ q_{21}\,u_g(x_1; y) + q_{22}\,u_g'(x_1; y) + A\,\Sigma_2\,u_1 = 0\,, \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} B = (y - 1)\,, \\ A = -1\,. \end{array}\right\}$$

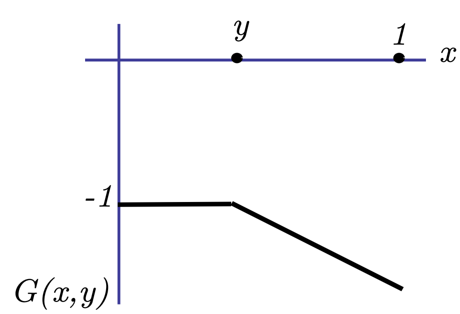
Αντικαθιστώντας τα A, B που μόλις βρήκαμε στην (2.51) η συνάρτηση Green γίνεται

$$G(x, y) = H(x - y)\,(x - y) - x + y - 1\,, \tag{2.52}$$

ή αναλύοντάς την κατά κλάδους παίρνουμε

$$G(x, y) = \left\{\begin{array}{ll} x - y\,, & 1 \geq x > y\,, \\ 0\,, & 0 \leq x < y\,, \end{array}\right. + \left\{\begin{array}{ll} y - x - 1\,, & 1 \geq x > y\,, \\ y - x - 1\,, & 0 \leq x < y\,, \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{ll} -1\,, & 1 \geq x > y\,, \\ y - x - 1\,, & 0 \leq x < y\,, \end{array}\right.$$

που είναι ακριβώς η συνάρτηση Green (2.50) που βρήκαμε με τον πρώτο τρόπο.



Σχήμα 3: Η γραφική παράσταση της $G(x, y)$ που δίνεται από την σχέση (2.50).

Παράδειγμα 3ο: Πρόβλημα αρχικών τιμών

Μας ζητείται να βρούμε την συνάρτηση Green για το ΠΑΤ

$$u''(x) + u(x) = f(x) \qquad u(0) = r_1\,, \quad u'(0) = r_2\,.$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι το πλήρως ομογενές ΠΑΤ έχει μόνο την μηδενική λύση, οπότε η συνάρτηση Green υπάρχει και είναι μοναδική. Η συνάρτηση Green $G(x, y)$ (δες το σχετικό εδάφιο) είναι η

$$G(x, y) = H(x - y)u_G(x; y)\,.$$

όπου η $u_G(x; y)$ είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ

$$u_G'' + u_G = 0\,, \qquad u_G(y) = 0\,, \quad u_G'(y) = 1\,.$$

Αφού το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της προηγούμενης ΣΔΕ είναι το $r^2 + 1 = 0$, εύκολα διαπιστώνουμε ότι η λύση του προηγούμενου ΠΑΤ είναι γραμμικός συνδυασμός ημίτονων και συνημίτονων του x , δηλ.

$$u_G = c_1\, \cos x + c_2\, \sin x\,.$$

Η επιβολή των αρχικών συνθηκών $u_G(y) = 0$, $u_G'(y) = 1$, δίνει το παρακάτω σύστημα

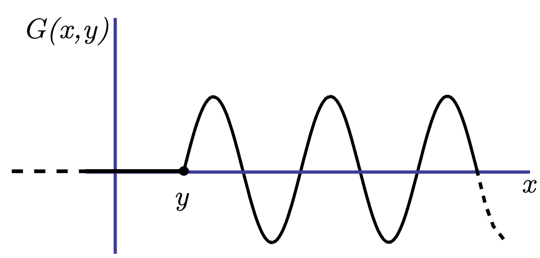
$$\left.\begin{array}{l} u_G(y) = 0 \\ u_G'(y) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} c_1 \cos y + c_2 \sin y = 0 \\ -c_1 \sin y + c_2 \cos y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1 = -\sin y \\ c_2 = \cos y \end{array}\right\}.$$

Οπότε

$$u_G = -\sin x\, \cos x + \cos y\, \sin x = \sin(x - y)\,,$$

και συνεπώς η συνάρτηση Green είναι η

$$G(x, y) = H(x - y)\, \sin(x - y)\,. \tag{2.53}$$



Σχήμα 4: Η γραφική παράσταση της $G(x, y)$ που δίνεται από την σχέση (2.53).

2.5 Επίλυση ΠΣΤ με την χρήση της συνάρτησης Green

Όπως έχουμε επισημάνει η αρχή υπέρθεσης των λύσεων εκφράζει το γεγονός ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί από μη-ομογενείς όρους παράγουν γραμμικούς συνδυασμούς των λύσεων. Εφαρμόζοντας την αρχή αυτή, η γενική λύση του ΠΣΤ που απαρτίζεται από την ΣΔΕ (2.2) και τις συνοριακές συνθήκες (2.3), είναι η γραμμική υπέρθεση (*i*) της λύσης του ΠΣΤ με δοσμένα $\{f(x); 0, 0\}$, δηλαδή της μη-ομογενούς ΣΔΕ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες, και (*ii*) της λύσης του ΠΣΤ με δοσμένα $\{0; r_1, r_2\}$, δηλαδή της λύσης της ομογενούς ΣΔΕ με μη-ομογενείς συνοριακές τιμές, ή αλλιώς έχουμε

$$u(x) = u_{\{f(x);0,0\}} + u_{\{0;r_1,r_2\}} \,. \tag{2.54}$$

Οπότε, η λύση του ΠΣΤ ανάγεται στην εύρεση των παραπάνω δυο λύσεων. Για την εύρεση της κάθε μιας ξεχωριστά θα εφαρμόσουμε και πάλι την αρχή υπέρθεσης των λύσεων.
Πρώτα θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην $u_{\{f(x);0,0\}}$. Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζαμε την λύση του ΠΣΤ στο τυχαίο σημείο y, $x_0 < y < x_1$, με όρο μη-ομογένειας $f(y)$. Στο συνεχές όριο, καθώς το y διατρέχει όλο το διάστημα $x_0 < y < x_1$, θα θέλαμε να έχουμε μια αναπαράσταση του όρου μη-ομογένειας η οποία να εκφράζει το συνολικό άθροισμα των όρων μη-ομογένειας που είναι εντοπισμένοι στο τυχαίο y. Στο συνεχές όριο τα αθροίσματα αντικαθίστανται από ολοκληρώματα και μια τέτοια ολοκληρωτική αναπαράσταση μας παρέχει η “συνάρτηση” $\delta(x-y)$ του Dirac με πόλο στο y. Πράγματι έχουμε ότι

$$f(x) = \int_{x_0}^{x_1} \delta(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y \,.$$

Οπότε είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η λύση του ΠΣΤ με δοσμένα $\{f(x); 0, 0\}$ παράγεται από μια όμοια σε μορφή γραμμική υπέρθεση συναρτήσεων Green, οι οποίες είναι λύσεις για καθένα ξεχωριστά ΠΣΤ εντοπισμένο στο $x = y$ με όρο μη-ομογένειας $\delta(x-y)$, δηλαδή

$$u_{\{f(x);0,0\}} = \int_{x_0}^{x_1} G(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y \,. \tag{2.55}$$

Αντί να δώσουμε μια αυστηρή απόδειξη ότι πράγματι η $u_{\{f(x);0,0\}}$ που δίνεται από την σχέση (2.55), ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{f(x); 0, 0\}$, θα δώσουμε μια φορμαλιστική απόδειξη που αναδεικνύει την παραπάνω επιχειρηματολογία. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) = \int_{x_0}^{x_1} \delta(x-y) f(y)\, \mathrm{d}y &= \int_{x_0}^{x_1} \big(L\, G(x,y)\big) f(y)\, \mathrm{d}y = \\ &= L \left(\int_{x_0}^{x_1} G(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y \right) = L\, u_{\{f(x);0,0\}} \,. \end{aligned}$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της συνάρτησης Green, η $G(x,y)$ ικανοποιεί τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες, οπότε όταν επιβάλλουμε τις συνοριακές συνθήκες στην $u_{\{f(x);0,0\}}$, έχουμε

$$\Sigma_1\, u_{\{f(x);0,0\}} = \int_{x_0}^{x_1} \big(\Sigma_1\, G(x,y)\big) f(y)\,\mathrm{d}y = 0\,,$$

$$\Sigma_2\, u_{\{f(x);0,0\}} = \int_{x_0}^{x_1} \big(\Sigma_2\, G(x,y)\big) f(y)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Συνεπώς, αν η $G(x,y)$ ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{\delta(x-y);0,0\}$, τότε η $u_{\{f(x);0,0\}}$ ικανοποιεί το ΠΣΤ με δοσμένα $\{f(x);0,0\}$.
Από την άλλη, η λύση του ΠΣΤ με δοσμένα $\{0;r_1,r_2\}$ γράφεται ως

$$u_{\{0;r_1,r_2\}}(x) = A\,u_1(x) + B\,u_2(x)\,,$$

όπου u_1 είναι μια μη-τετριμμένη λύση της ομογενούς ΣΔΕ $L\,u = 0$, που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\Sigma_1\, u_1 = 0$, και αντίστοιχα η u_2 είναι μια μη-τετριμμένη λύση της ομογενούς ΣΔΕ $L\,u = 0$, που ικανοποιεί την συνοριακή συνθήκη $\Sigma_2\, u_1 = 0$. Τα A, B είναι δυο αυθαίρετες πραγματικές σταθερές που θα προσδιοριστούν από την επιβολή των συνοριακών συνθηκών. Πράγματι, επιβάλλοντας την συνοριακή συνθήκη $\Sigma_1\, u_{\{0;r_1,r_2\}} = r_1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\Sigma_1\, u_{\{0;r_1,r_2\}} = r_1 \quad &\Rightarrow \quad A\,\Sigma_1\, u_1 + B\,\Sigma_1\, u_2 = r_1\,,\\
&\Rightarrow \qquad\qquad\quad B\,\Sigma_1\, u_2 = r_1\,,\\
&\Rightarrow \quad B = \frac{r_1}{\Sigma_1\, u_2}\,.
\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, από την επιβολή της συνοριακής συνθήκης $\Sigma_2\, u(x) = r_2$ βρίσκουμε ότι

$$A = \frac{r_2}{\Sigma_2\, u_1}\,.$$

Ανακεφαλαιώνοντας, αν το πλήρως ομογενές ΠΣΤ

$$\begin{aligned}
&a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0\,, \qquad x_0 < x < x_1\,,\\
&\Sigma_1\, u = 0\,, \quad \Sigma_2\, u = 0\,,
\end{aligned}$$

έχει μόνη λύση την μηδενική, τότε η μοναδική λύση του ΠΣΤ

$$\begin{aligned}
&a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x)\,, \qquad x_0 < x < x_1\,,\\
&\Sigma_1\, u = r_1\,, \quad \Sigma_2\, u = r_2\,,
\end{aligned}$$

είναι η

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y + \frac{r_2}{\Sigma_2\, u_1}\, u_1(x) + \frac{r_1}{\Sigma_1\, u_2}\, u_2(x)\,.$$

Εφαρμογές στα παραδείγματα της παραγράφου 2.4

Παράδειγμα 1ο: Αμιγείς συνοριακές συνθήκες

Θεωρώντας το 1ο παράδειγμα της παραγράφου 2.4, μας ζητείται να λύσουμε το ακόλουθο ΠΣΤ

$$u''(x) = f(x)\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u(0) - u'(0) = r_1\,, \qquad u(1) - u'(1) = r_2\,, \tag{2.56}$$

χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Green (2.39), που για ευκολία την γράφουμε πάλι εδώ

$$G(x,y) = \begin{cases} x(y+1)\,, & 1 \geq x > y > 0\,, \\ y(1+x)\,, & 0 \leq x < y < 1\,. \end{cases} \tag{2.57}$$

Λύση: Η γενική λύση της ομογενούς ΣΔΕ $u''(x) = 0$ είναι η $u(x) = c_1 + c_2\,x$. Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες $u(0) - u'(0) = r_1$, και $u(1) - u'(1) = r_2$, οι σταθερές c_1, c_2 καθορίζονται μονοσήμαντα και έτσι έχουμε

$$u_{\{0;r_1,r_2\}}(x) = (r_2 - r_1)\,x + r_2\,.$$

Από την άλλη, η λύση $u_{\{f(x);0,0\}}$, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, δίνεται από την σχέση (2.55), όπου $G(x,y)$ είναι η (2.57). Αναλυτικά,

$$u_{\{f(x);0,0\}} = \int_0^1 G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x x\,(y+1) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 y\,(x+1) f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Οπότε η γενική λύση του ΠΣΤ (2.56) είναι το άθροισμα των $u_{\{f(x);0,0\}}$ και $u_{\{0;r_1,r_2\}}$, και παίρνει την ρητή έκφραση

$$u(x) = \int_0^x x\,(y+1) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 y\,(x+1) f(y)\,\mathrm{d}y + (r_2 - r_1)\,x + r_2\,. \tag{2.58}$$

Για δοσμένη συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x)$, εκτελώντας τα ολοκληρώματα στην σχέση (2.58), βρίσκουμε την λύση του ΠΣΤ (2.56). Για παράδειγμα όταν ο όρος μη-ομογένειας στη ΣΔΕ είναι $f(x) = e^x$, η (2.58) δίνει

$$u(x) = e^x + (r_2 - r_1)\,x + r_2\,,$$

ενώ αν $f(x) = \cos(\pi\,x)$ βρίσκουμε ότι

$$u(x) = -\frac{1}{\pi^2}\big(2\,x + 1 + \cos(\pi\,x)\big) + (r_2 - r_1)\,x + r_2\,.$$

Παράδειγμα 2ο: μικτές συνοριακές συνθήκες

Στο 2ο παράδειγμα μας ζητείται να λύσουμε το ακόλουθο ΠΣΤ

$$u''(x) = f(x)\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u'(0) - u(1) = r_1\,, \qquad u'(1) = r_2\,. \tag{2.59}$$

με την βοήθεια της συνάρτησης Green (2.50), που είναι η

$$G(x,y) = \begin{cases} -1 & 1 \geq x > y > 0\,, \\ y - x - 1\,, & 0 \leq x < y < 1\,. \end{cases} \tag{2.60}$$

Λύση: Η γενική λύση της ομογενούς ΣΔΕ $u''(x) = 0$ είναι η $u(x) = c_1 + c_2\,x$. Επιβάλλοντας τις συνοριακές συνθήκες $u'(0) - u(1) = r_1$, και $u'(1) = r_2$, οι σταθερές c_1, c_2 καθορίζονται μονοσήμαντα και έχουμε

$$u_{\{0;r_1,r_2\}}(x) = r_2\,x - r_1\,.$$

Η λύση $u_{\{f(x);0,0\}}$, σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, δίνεται από την σχέση (2.55), όπου $G(x,y)$ είναι η (2.60). Αναλυτικά,

$$u_{\{f(x);0,0\}} = \int_0^1 G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x (-1) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (y - x - 1) f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Η γενική λύση του ΠΣΤ (2.59) είναι το άθροισμα των $u_{\{f(x);0,0\}}$ και $u_{\{0;r_1,r_2\}}$, και παίρνει την ρητή έκφραση

$$u(x) = \int_0^x (-1) f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 (y - x - 1) f(y)\,\mathrm{d}y + r_2\,x - r_1\,. \tag{2.61}$$

Αν ο όρος μη-ομογένειας στη ΣΔΕ είναι $f(x) = e^x$, η (2.61) δίνει

$$u(x) = -e\,(x+1) + e^x + 1 + r_2\,x - r_1\,,$$

ενώ αν $f(x) = \cos(\pi\,x)$ βρίσκουμε ότι

$$u(x) = -\frac{1}{\pi^2}\left(\cos(\pi\,x) + 1\right) + r_2\,x - r_1\,.$$

Παράδειγμα 3ο: Πρόβλημα αρχικών τιμών

Τέλος, θεωρούμε το ΠΑΤ του 3ου παραδείγματος

$$u''(x) + u(x) = f(x) \qquad u(0) = r_1\,, \quad u'(0) = r_2\,. \tag{2.62}$$

Μας ζητείται να λύσουμε το πιο πάνω ΠΑΤ, με την βοήθεια της συνάρτησης Green που έχουμε βρει και είναι η $G(x,y) = H(x-y)\,\sin(x-y)$, ή ισοδύναμα

$$G(x,y) = \begin{cases} \sin(x-y) & x > y > 0\,, \\ 0\,, & 0 < x < y\,. \end{cases} \tag{2.63}$$

Η γενική λύση της ΣΔΕ της ομογενούς ΣΔΕ είναι η $u(x) = c_1\,\cos x + c_2\,\sin x$. Επιβάλλοντας τις αρχικές συνθήκες $u(0) = r_1$ και $u'(0) = r_2$, οι σταθερές c_1, c_2 καθορίζονται μονοσήμαντα και έχουμε

$$u_{\{0;r_1,r_2\}}(x) = r_1\,\cos x + r_2\,\sin x\,.$$

Όπως στα προηγούμενα, η λύση $u_{\{f(x);0,0\}}$, δίνεται από την σχέση (2.55), όπου τώρα $G(x,y)$ είναι η (2.63). Αναλυτικά,

$$u_{\{f(x);0,0\}} = \int_0^x \sin(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Η γενική λύση του ΠΑΤ είναι το άθροισμα των $u_{\{f(x);0,0\}}$ και $u_{\{0;r_1,r_2\}}$, και παίρνει τη μορφή

$$u(x) = \int_0^x \sin(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y + r_1\,\cos x + r_2\,\sin x\,. \tag{2.64}$$

Αν ο όρος μη-ομογένειας στη ΣΔΕ είναι $f(x) = e^x$, η (2.64) δίνει

$$u(x) = \frac{1}{2}(e^x - \cos x - \sin x) + r_1\,\cos x + r_2\,\sin x\,,$$

ενώ αν $f(x) = x\,\sin x$, η (2.64) δίνει

$$u(x) = -\frac{x}{4}\big(x\,\cos x - \sin x\big) + r_1\,\cos x + r_2\,\sin x\,.$$

2.6 Ασκήσεις

Αφού κατασκευαστεί η συνάρτηση Green για καθένα από τα ακόλουθα ΠΣΤ

1. $u''(x) = x\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad u(0) = u(1) = 0\,.$
2. $u''(x) = x\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad u(0) = u'(1) = 0\,.$
3. $u''(x) - u'(x) = e^x\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad u(0) = 0\,,\quad u'(1) - u(1) = 1\,.$
4. $u''(x) - k^2\,u(x) = x\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad u(0) = u(1) = 0\,,\quad k \in \mathbb{R}$, σταθερός αριθμός.
5. $u''(x) + u(x) = \cos x\,,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}\,,\quad u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0\,.$
6. $u''(x) + u(x) = x\cos x\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad u(0) = 0\,,\quad u(1) = 1\,.$
7. $u''(x) + u(x) = x\cos x\,,\quad 0 < x < 1\,,\quad u(0) = 1\,,\quad u'(1) = 0\,.$

να βρεθεί η μια και μοναδική λύση τους.

2.7 Το συζυγές πρόβλημα

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για κάθε διαφορικό τελεστή L

$$L = a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)\,, \tag{2.65}$$

με συντελεστές στο $C^2(x_0, x_1)$, ο τυπικά συζυγής τελεστής L^* ορίζεται από την σχέση

$$L^* = a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \big(2\,a_2'(x) - a_1(x)\big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \left(a_2''(x) - a_1'(x) + a_0(x)\right), \tag{2.66}$$

έτσι ώστε για κάθε $u, v \in C^2(x_0, x_1)$, ισχύει ο τύπος του Green

$$\int_{x_0}^{x_1} \big(\,v\,Lu - u\,L^* v\big)\mathrm{d}x = \big[J(u,v)\big]_{x=x_0}^{x=x_1}\,, \tag{2.67}$$

όπου

$$J(u,v) = a_2(v\,u' - u\,v') + (a_1 - a_2')\,u\,v\,, \tag{2.68}$$

Αν $a_2'(x) = a_1(x)$, τότε ο L είναι αυτοσυζυγής ($L = L^*$) και οι σχέσεις (2.65) και (2.68) παίρνουν την πιο απλή μορφή

$$L = L^* = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_2(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) + a_0\,, \qquad J(u,v) = a_2(v\,u' - u\,v')\,. \tag{2.69}$$

αντίστοιχα.

Συζυγείς συνοριακές συνθήκες

Εισάγουμε τώρα την έννοια των *συζυγών συνοριακών συνθηκών*. Θεωρούμε το σύνολο των συναρτήσεων $u \in C^2(x_0, x_1)$ οι οποίες ικανοποιούν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες (2.3),

$$\begin{aligned}
\Sigma_1\,u &= p_{11}u(x_0) + p_{12}u'(x_0) + q_{11}u(x_1) + q_{12}u'(x_1) = 0\,,\\
\Sigma_2\,u &= p_{21}u(x_0) + p_{22}u'(x_0) + q_{21}u(x_1) + q_{22}u'(x_1) = 0\,,
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Συμφωνούμε να συμβολίζουμε το σύνολο αυτό με $\boldsymbol{\Sigma}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left\{u \in C^2(x_0, x_1); \Sigma_1\,u(x) = \Sigma_2\,u(x) = 0\right\}\,.$$

Λόγω της γραμμικότητας των συνοριακών συναρτησιακών Σ_1, Σ_2, το σύνολο $\boldsymbol{\Sigma}$ είναι ένας γραμμικός χώρος, δηλαδή αν $u_1(x)$, $u_2(x)$ δυο τυχαία στοιχεία του $\boldsymbol{\Sigma}$ τότε και το $a_1\,u_2(x) + a_2\,u_2(x)$, ανήκει στο $\boldsymbol{\Sigma}$ για κάθε πραγματικούς αριθμούς a_1, a_2. Το συζυγές σύνολο $\boldsymbol{\Sigma}^*$ ορίζεται από το σύνολο των $v \in C^2(x_0, x_1)$ οι οποίες ικανοποιούν την σχέση $\big[J(u,v)\big]_{x=x_0}^{x=x_1} = 0$, για κάθε $u \in \boldsymbol{\Sigma}$, δηλαδή

$$\boldsymbol{\Sigma}^* = \left\{v \in C^2(x_0, x_1); \quad \big[J(u,v)\big]_{x=x_0}^{x=x_1} = 0\,, \quad \forall u \in \boldsymbol{\Sigma}\right\}\,.$$

Τα στοιχεία του $\mathbf{\Sigma}^*$ χαρακτηρίζονται από δυο συνοριακές συνθήκες $\Sigma_1^* \, v = \Sigma_2^* \, v = 0$, του τύπου (2.70), αλλά γενικά με διαφορετικούς συντελεστές p_{ij}, q_{ij}. Αν και το σύνολο $\mathbf{\Sigma}^*$ καθορίζεται μονοσήμαντα από το σύνολο $\mathbf{\Sigma}$, οι συζυγείς συνοριακές συνθήκες Σ_1^*, Σ_2^* δεν καθορίζονται μονοσήμαντα. Για παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό των Σ_1^*, Σ_2^* για να περιγράψουμε το σύνολο $\mathbf{\Sigma}^*$. Η παρατήρηση αυτή μας οδηγεί στον ορισμό του αυτο-συζυγούς ΠΣΤ.

Ορισμός: Το ΠΣΤ που αφορά τον τελεστή L και τις συνοριακές συνθήκες Σ_1, Σ_2 λέγεται αυτο-συζυγές αν και μόνο αν $L = L^*$ και $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^*$. Η συνθήκη $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^*$ σημαίνει ότι είναι δυνατόν να επιλέξουμε τα Σ_1^*, Σ_2^*, έτσι ώστε $\Sigma_1^* = \Sigma_1$ και $\Sigma_2^* = \Sigma_2$.

Παραδείγματα εύρεσης των συζυγών συνοριακών συνθηκών:

1. Ας θεωρήσουμε το ΠΣΤ του 2ου Παραδείγματος της παραγράφου 2.4

$$u''(x) = f(x) \,, \qquad 0 < x < 1 \,, \qquad u'(0) - u(1) = r_1 \,, \qquad u'(1) = r_2 \,. \tag{2.71}$$

με μικτές συνοριακές συνθήκες. Θέλουμε να βρούμε το συζυγές σύνολο $\mathbf{\Sigma}^*$. Υπολογίζουμε την ποσότητα $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$, η οποία για τον συγκεκριμένο τελεστή $L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\,x^2}$ είναι

$$\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1} = \big(v(1)\,u'(1) - u(1)\,v'(1)\big) - \big(v(0)\,u'(0) - u(0)\,v'(0)\big) \,. \tag{2.72}$$

Το σύνολο $\mathbf{\Sigma}^*$ αποτελείται από όλες εκείνες τις συναρτήσεις $v \in C^2(0,1)$ τέτοιες που η ποσότητα $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$ μηδενίζεται για κάθε συνάρτηση u τέτοια που ικανοποιεί τις συνθήκες $u'(0) - u(1) = 0$, $u'(1) = 0$. Αντικαθιστώντας $u(1) = u'(0)$ και $u'(1) = 0$ στην (2.72) βρίσκουμε

$$\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1} = u(0)\,v'(0) - u'(0)\,\big(v(0) + v'(1)\big) \,. \tag{2.73}$$

Ο μηδενισμός της $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$, για αυθαίρετες τιμές $u(0)$, $u'(0)$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει

$$v(0) + v'(1) = 0 \,, \qquad v'(0) = 0 \,.$$

Οπότε τα στοιχεία του συζυγούς συνόλου $\mathbf{\Sigma}^*$ καθορίζονται από τις συζυγείς συνοριακές συνθήκες

$$\Sigma_1^* \, v(x) = v(0) + v'(1) \,, \qquad \Sigma_2^* \, v(x) = v'(0) \,,$$

του ΠΣΤ (2.71). Φυσικά, οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός των Σ_1^*, Σ_2^* ορίζει το ίδιο συζυγές σύνολο $\mathbf{\Sigma}^*$.

2. Θεωρούμε τώρα το 1ο Παράδειγμα της παραγράφου 2.4

$$u''(x) = f(x) \,, \qquad 0 < x < 1 \,, \qquad u(0) - u'(0) = r_1 \,, \qquad u(1) - u'(1) = r_2 \,. \tag{2.74}$$

με αμιγείς συνοριακές συνθήκες. Επειδή ο τελεστής L είναι ο ίδιος με το προηγούμενο παράδειγμα, η ποσότητα $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$ είναι και πάλι

$$\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1} = \big(v(1)\,u'(1) - u(1)\,v'(1)\big) - \big(v(0)\,u'(0) - u(0)\,v'(0)\big) \,. \tag{2.75}$$

Τώρα όμως, το σύνολο $\mathbf{\Sigma}^*$ αποτελείται από όλες εκείνες τις συναρτήσεις $v \in C^2(0,1)$ τέτοιες που η ποσότητα $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$ μηδενίζεται για κάθε συνάρτηση u τέτοια που $u'(0) = u(0)$, $u'(1) = u(1)$. Αντικαθιστώντας τις τελευταίες στην (2.75) έχουμε

$$\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1} = \big(v(1) - v'(1)\big)\, u(1) - \big(v(0) - v'(0)\big)\, u(0)\,. \tag{2.76}$$

Ο μηδενισμός της $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$, για αυθαίρετες τιμές $u(0)$, $u(1)$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει

$$v(0) - v'(0) = 0\,, \qquad v(1) - v'(1) = 0\,.$$

Οπότε τα στοιχεία του συζυγούς συνόλου $\mathbf{\Sigma}^*$ καθορίζονται από τις συζυγείς συνοριακές συνθήκες

$$\Sigma_1^*\, v(x) = v(0) - v'(0)\,, \qquad \Sigma_2^*\, v(x) = v(1) - v'(1)\,.$$

Σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατόν $\Sigma_1^* = \Sigma_1$ και $\Sigma_2^* = \Sigma_2$, και συνεπώς $\mathbf{\Sigma}^* = \mathbf{\Sigma}$. Επιπλέον, επειδή το τελεστής L είναι αυτοσυζυγής έχουμε ότι το ΠΣΤ (2.74) είναι αυτοσυζυγές. Γενικότερα αν $L = L^*$ και οι συνοριακές συνθήκες είναι *αμιγείς*, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι $\mathbf{\Sigma}^* = \mathbf{\Sigma}$ και συνεπώς όλα τα αντίστοιχα ΠΣΤ είναι αυτοσυζυγή.

3. Σε αντιδιαστολή με το προηγούμενο παράδειγμα, τα προβλήματα αρχικών τιμών δεν μπορεί με κανένα τρόπο να είναι αυτοσυζυγή, έστω κι αν $L = L^*$. Αυτό συμβαίνει για τον λόγο ότι ισχύει πάντα $\mathbf{\Sigma}^* \neq \mathbf{\Sigma}$. Πράγματι, ας θεωρήσουμε τον γενικό τελεστή $L = a_2(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + a_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + a_0(x)$ και τις αρχικές συνθήκες $u(x_0) = u'(x_0) = 0$. Υπολογίζουμε την ποσότητα $\big[J(u,v)\big]_{x=x_0}^{x=x_1}$, η οποία λαμβάνοντας υπόψη ότι $u \in \mathbf{\Sigma}$, γίνεται

$$\big[J(u,v)\big]_{x=x_0}^{x=x_1} = \Big(\big(a_1(x_1) - a_2'(x_1)\big)\, v(x_1) - a_2(x_1)\, v'(x_1)\Big)\, u(x_1) + a_2(x_1)\, v(x_1)\, u'(x_1)\,. \tag{2.77}$$

Ο μηδενισμός της $\big[J(u,v)\big]_{x=0}^{x=1}$, για αυθαίρετες τιμές $u(0)$, $u(1)$, μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα πρέπει

$$v(x_1) = 0\,, \qquad v'(x_1) = 0\,.$$

Οπότε τα στοιχεία του συζυγούς συνόλου $\mathbf{\Sigma}^*$ καθορίζονται από τις συζυγείς συνοριακές συνθήκες

$$\Sigma_1^*\, v(x) = v(x_1)\,, \qquad \Sigma_2^*\, v(x) = v'(x_1)\,.$$

Αφού οι συζυγείς συνθήκες είναι υπολογισμένες στο σημείο $x = x_1$, που είναι διαφορετικό από το αρχικό σημείο $x = x_0$, δεν είναι δυνατόν με κανένα τρόπο οι αρχικές συνθήκες ενός ΠΑΤ να είναι αυτοσυζυγείς.

2.8 Η συζυγής συνάρτηση Green

Θεωρούμε το ΠΣΤ που ικανοποιεί η συνάρτηση Green

$$L\,G(x,y) = \delta(x-y)\,, \qquad x_0 < x, y < x_1\,, \quad \Sigma_1\, G = 0\,, \quad \Sigma_2\, G = 0\,, \tag{2.78}$$

Ας συμβολίσουμε με $G^*(x,y)$ την λύση του συζυγούς ΠΣΤ, δηλαδή

$$L^*\, G^*(x,y') = \delta(x-y')\,, \qquad x_0 < x, y' < x_1\,, \quad \Sigma_1^*\, G^* = 0\,, \quad \Sigma_2^*\, G^* = 0\,. \tag{2.79}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Green για τις συναρτήσεις $G(x,y)$ και $G(x,y')$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} G^*(x,y')\left(L\,G(x,y)\right)\mathrm{d}x \;\; &- \;\; \int_{x_0}^{x_1} G(x,y)\left(L^* G^*(x,y')\right)\mathrm{d}x = \left[J(G,G^*)\right]_{x=x_0}^{x=x_1} \Rightarrow \\
\int_{x_0}^{x_1} G^*(x,y')\,\delta(x-y)\,\mathrm{d}x \;\; &- \;\; \int_{x_0}^{x_1} G(x,y)\,\delta(x-y')\,\mathrm{d}x = \left[J(G,G^*)\right]_{x=x_0}^{x=x_1} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$G^*(y,y') \;\; - \;\; G(y',y) = \left[J(G,G^*)\right]_{x=x_0}^{x=x_1}\,. \tag{2.80}$$

Αφού όμως η G^* ικανοποιεί τις συζυγείς συνοριακές συνθήκες έχουμε ότι $\left[J(G,G^*)\right]_{x=x_0}^{x=x_1} = 0$ και συνεπώς

$$G^*(y,y') = G(y',y)\,. \tag{2.81}$$

Εκτελώντας τις αντικαταστάσεις $y \to x$ και $y' \to y$ στην σχέση (2.81) έχουμε ότι

$$G^*(x,y) = G(y,x)\,, \tag{2.82}$$

που σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε την συνάρτηση Green του ΠΣΤ (2.78), γνωρίζουμε αυτόματα και την λύση του συζυγούς ΠΣΤ (2.79) (όπου $y' = y$). Αρκεί να εναλλάξουμε τα ορίσματα στη συνάρτηση Green $G(x,y)$ και παίρνουμε την λύση $G^*(x,y)$. Η συνάρτηση $G^*(x,y)$ λέγεται η **συζυγής συνάρτηση Green**.

Άμεση συνέπεια της σχέσης (2.82) είναι ότι αν το ΠΣΤ που αφορά τον τελεστή L με συνοριακές συνθήκες Σ_1, Σ_2 είναι αυτοσυζυγές, τότε η συνάρτηση Green είναι συμμετρική ως προς τα ορίσματά της, δηλαδή

$$G(x,y) = G(y,x)\,.$$

Η προηγούμενη σχέση είναι γνωστή ως *αρχή της αμοιβαιότητας*, και εκφράζει το γεγονός ότι η απόκριση στο x που προκαλείται από μια δ-πηγή συγκεντρωμένη στο y, είναι ίδια με την απόκριση στο y που προκαλείται από μια δ-πηγή συγκεντρωμένη στο x.

Χρησιμότητα της συζυγούς συνάρτησης Green

Για ένα γενικό ΠΣΤ (όχι απαραίτητα αυτοσυζυγές), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η $G^*(x, y)$ ικανοποιεί την σχέση (2.82) για να εκφράσουμε την λύση $u_{\{0;r_1,r_2\}}$ του ΠΣΤ με ομογενή ΣΔΕ και μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$L\,u(x) = 0\,, \qquad x_0 < x < x_1\,, \quad \Sigma_1\,u = r_1\,, \quad \Sigma_2\,u = r_2\,, \tag{2.83}$$

μέσω της αντίστοιχης συνάρτησης Green. Πράγματι, εφαρμόζοντας τον τύπο του Green για τις συναρτήσεις $u(x)$, $G^*(x, y)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{x_0}^{x_1} G^*(x,y)\,\big(L\,u(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad &- \quad \int_{x_0}^{x_1} u(x)\,\big(L^* G^*(x,y)\big)\,\mathrm{d}x = \big[J(u(x), G^*(x,y))\big]_{x=x_0}^{x=x_1} \Rightarrow \\
&- \quad \int_{x_0}^{x_1} u(x)\,\delta(x-y)\,\mathrm{d}x = \big[J(u(x), G(y,x))\big]_{x=x_0}^{x=x_1} \Rightarrow \\
&\qquad -u(y) = \big[J(u(x), G(y,x))\big]_{x=x_0}^{x=x_1}\,.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Εναλλάσσοντας τις μεταβλητές x, y ($x \leftrightarrow y$), η σχέση (2.84) γίνεται

$$u(x) = -\big[J(u(y), G(x,y))\big]_{y=x_0}^{y=x_1}\,, \tag{2.85}$$

όπου θα πρέπει να προσεχθεί το γεγονός ότι οι παραγωγίσεις για τον υπολογισμό της ποσότητας $\big[J(u(y), G(x,y))\big]_{y=x_0}^{y=x_1}$ είναι ως προς y. Επιπλέον, η ποσότητα $\big[J(u(y), G(x,y))\big]_{y=x_0}^{y=x_1}$ εμπλέκει μόνο την συνάρτηση Green και τις συνοριακές τιμές της συνάρτησης u. Συνεπώς, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η γενική λύση ενός ΠΣΤ της μορφής που μελετάμε μπορεί να εκφρασθεί μέσω της συνάρτησης Green και των συνοριακών τιμών της u. Ανακεφαλαιώνοντας την παρούσα διαπραγμάτευση έχουμε ότι

Αν το πλήρως ομογενές ΠΣΤ

$$\begin{aligned}
&a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = 0\,, \qquad x_0 < x < x_1\,, \\
&\quad \Sigma_1\,u = 0\,, \quad \Sigma_2\,u = 0\,,
\end{aligned}$$

έχει μόνη λύση την μηδενική, τότε η μοναδική λύση του ΠΣΤ

$$\begin{aligned}
&a_2(x)u'' + a_1(x)u' + a_0(x)u = f(x)\,, \qquad x_0 < x < x_1\,, \\
&\quad \Sigma_1\,u = r_1\,, \quad \Sigma_2\,u = r_2\,,
\end{aligned}$$

είναι η

$$u(x) = \int_{x_0}^{x_1} G(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y - \big[J(u(y), G(x,y))\big]_{y=x_0}^{y=x_1}\,.$$

Παράδειγμα για την χρησιμότητα της σχέσης (2.85) :
Ας θεωρήσουμε το ΠΣΤ του 2ου Παραδείγματος της παραγράφου 2.4 με ομογενή ΣΔΕ και τις μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες, δηλαδή το

$$u''(x) = 0\,, \qquad 0 < x < 1\,, \qquad u'(0) - u(1) = r_1\,, \qquad u'(1) = r_2\,, \tag{2.86}$$

Η συνάρτηση Green του ΠΣΤ που δίνεται από την (2.86) είναι η

$$G(x,y) = \begin{cases} -1 & 1 \geq x > y \geq 0\,, \\ y - x - 1\,, & 0 \leq x < y \leq 1\,. \end{cases} \tag{2.87}$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο της $G(x,y)$ ως προς y και έχουμε

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,y} G(x,y) = \begin{cases} 0 & 1 \geq x > y \geq 0\,, \\ 1\,, & 0 \leq x < y \leq 1\,. \end{cases} \tag{2.88}$$

Από τις σχέσεις (2.87), (2.88), παρατηρώντας σε ποιόν κλάδο παίρνει η y τις τιμές 0 και 1, υπολογίζουμε τις τιμές

$$\begin{aligned} G(x,0) &= -1\,, \qquad \tfrac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,y}(x,0) = 0\,, \\ G(x,1) &= -x\,, \qquad \tfrac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,y}(x,1) = 1\,. \end{aligned} \tag{2.89}$$

Για το συγκεκριμένο παράδειγμα η σχέση (2.85) γίνεται

$$u(x) = -\Big[G(x,y)\,u'(y) - u(y)\,\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,y}(x,y)\Big]_{y=0}^{y=1}\,, \tag{2.90}$$

η οποία χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.89) και τις συνοριακές τιμές της $u(x)$ στα άκρα $x = 0$ και $x = 1$ δίνει

$$\begin{aligned} u(x) &= -\Big(G(x,1)\,u'(1) - u(1)\,\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,y}(x,1) - \big(G(x,0)\,u'(0) - u(0)\,\frac{\mathrm{d}\,G}{\mathrm{d}\,y}(x,0)\big)\Big) \\ &= -\Big(-x\,u'(1) - u(1) + u'(0)\Big) \\ &= r_2\,x - r_1\,. \end{aligned} \tag{2.91}$$

2.9 Ασκήσεις

1. Για καθένα ΠΣΤ που δίνεται στις ασκήσεις 1-7 της παραγράφου 2.6 να βρεθούν οι αντίστοιχες συζυγείς συνοριακές συνθήκες. Ποια ΠΣΤ είναι αυτοσυζυγή και ποια όχι ;

2. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.85) να βρεθεί η λύση των ΠΣΤ με ομογενή ΣΔΕ και τις δοσμένες μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες, που δίνονται στις ασκήσεις 3, 6 και 7 της παραγράφου 2.6 .