Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2018
Φυλλαδιο Ασκησεων 2

Άσκηση 2.1. Βρείτε δύο συναρτήσεις $y_1, y_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ οι οποίες: i) είναι παραγωγίσιμες στο $[0,1]$, ii) γραμμικώς ανεξάρτητες στο $[0,1]$, και iii) έχουν ορίζουσα Wronski ίση με μηδεν στο $[0,1]$.

Άσκηση 2.2. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$. Για $i = 1, \ldots, m$, ορίζουμε συνάρτηση $\varphi_i : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ με $\varphi_i(t) := t^{i-1}$ για κάθε $t \in (\alpha, \beta)$. Δείξτε ότι οι συναρτήσεις $(\varphi_i)_{i=1}^m$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες χωρίς να χρησιμοποιήσετε το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας.

Άσκηση 2.3 : Δίνεται η ΣΔΕ

$$(t - t\,y(t)) + (y(t) + t^2)\,y'(t) = 0.$$

α) Εξετάστε αν η ΣΔΕ είναι πλήρης.

β) Προσδιορίστε ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\mu(x,y) = \phi(x^2 + y^2)$ για την παραπάνω ΣΔΕ σε κατάλληλο σύνολο $D \subset \mathbb{R}^2$.

γ) Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα που βρήκατε στο (β), βρείτε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών της ΣΔΕ σε πεπλεγμένη μορφή.

Γ. Ζουράρης