Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2018
Φυλλαδιο Ασκησεων 3

Άσκηση 3.1. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y'''(t) - 2\,y''(t) - 3\,y'(t) = 0.$$

Άσκηση 3.2. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y'''(t) + 2\,y''(t) + y'(t) = 0.$$

Άσκηση 3.3. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y'''(t) + 4\,y''(t) + 13\,y'(t) = 0.$$

Άσκηση 3.4. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y^{(4)}(t) + 4\,y^{(3)}(t) + 8\,y^{(2)}(t) + 8\,y^{(1)} + 4\,y(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Αν p είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της Σ.Δ.Ε., βρείτε κατάλληλο πολυώνυμο q τέτοιο ώστε $p(x) = (q(x))^2$.

Άσκηση 3.5. Βρείτε τη γενική λύση της ακόλουθης Σ.Δ.Ε.

$$y^{(5)}(t) - 2\,y^{(4)}(t) + 2\,y^{(3)}(t) - 4\,y^{(2)}(t) + y'(t) - 2\,y(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω $m \in \mathbb{N}$ και πολυώνυμο $q(x) = x^m + \sum_{\ell=0}^{m-1} a_\ell\, x^\ell$, όπου $a_\ell \in \mathbb{Z}$ για $\ell = 0, \ldots, m-1$. Τότε υποψήφιες ρητές ρίζες του q είναι οι αριθμοί $\pm\,\mu$ όπου μ είναι διαιρέτης του a_0.

Άσκηση 3.6. Βρείτε διάστημα (a, b) και συνάρτηση $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ η οποία ειναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη λύνει το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\begin{aligned} &y''(t) + 2\,|y'(t)| + y(t) = 0 \quad \forall\, t \in (a, b),\\ &y(0) = 1,\ y'(0) = -1. \end{aligned}$$

Γ. Ζουράρης