Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2018
Εργαστηριο Ασκησεων 1

Άσκηση Ε1.1 : Έστω $a,\, b \in \mathbb{R}$ με $a < 0 < b$. Βρείτε για ποιό διάστημα (a, b) υπάρχει συνάρτηση $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και είναι λύση του προβλήματος:

$$\begin{aligned} &y'(t) = -4\,t\,e^{y(t)-2\,t} \quad \forall\, t \in (a, b),\\ &y(0) = 0. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Απάντηση. $y(t) = -\ln\big(2 - (1 + 2\,t)\,e^{-2t}\big)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άσκηση Ε1.2 : Έστω $a,\, b,\, t_0 \in \mathbb{R}$ με $a < t_0 < b$. Βρείτε για ποιό διάστημα (a, b) υπάρχει συνάρτηση $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και είναι λύση του προβλήματος:

$$\begin{aligned} &y'(t) = (1 + 2\,y^2(t))\,t \quad \forall\, t \in (a, b),\\ &y(t_0) = 0, \end{aligned}$$

όταν $t_0 = 0$ και όταν $t_0 = \pi$.

Υποδείξεις. Η ΣΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών. $(\mathrm{atctan}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

Απάντηση. Όταν $t_0 = 0$, η λύση είναι $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tan\left(\frac{t^2}{\sqrt{2}}\right)$ για κάθε $t \in \left(-\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{4}}}, \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{1}{4}}}\right)$. Όταν $t_0 = \pi$, η λύση είναι $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tan\left(\frac{t^2-\pi^2}{\sqrt{2}}\right)$ για κάθε $t \in \left(\left(\pi^2 - \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} + \pi^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$.

Άσκηση Ε1.3 : Έστω $a,\, b \in \mathbb{R}$, με $a < -1 < b$. Βρείτε για ποιό διαστήμα (a, b) υπάρχει συνάρτηση $y : (a, b) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a, b) και είναι λύση του προβλήματος:

$$\begin{aligned} &t\,y'(t) = \sqrt{t^2 - y^2(t)} + y(t) \quad \forall\, t \in (a, b),\\ &y(-1) = -1. \end{aligned}$$

Υποδείξεις. Γράψτε τη ΣΔΕ στη μορφή $y'(t) = F\left(\frac{y(t)}{t}\right)$. $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Απάντηση. Η μεθοδολογία του μαθήματος οδηγεί στις ακόλουθες δυο λύσεις:

Λύση 1. $y(t) = t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λύση 2. $y(t) = t\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - \ln(-t)\right)$ για κάθε $t \in [-e^{\pi}, -1]$. Επειδή $y'(-1) = 1$ μπορούμε να την επεκτείνουμε ως εξής

$$y(t) := \begin{cases} t\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - \ln(-t)\right), & \text{όταν} \quad t \in [-e^{\pi}, -1] \\ t, & \text{όταν} \quad t \geq -1 \end{cases} \qquad \forall\, t \geq -e^{\pi}.$$

Γ. Ζουράρης