Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2018
Φυλλαδιο Εργαστηριου 10
Τεταρτη 9/5/2018

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Fourier βρείτε τη λύση των ακόλουθων προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών:

Άσκηση 10.1.

$$\begin{aligned}&u_t = c^2\, u_{xx} + \tfrac{t^2}{2}\, \cos(x) \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi)\\&u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\&u(0,x) = \cos(x) \quad \forall\, x \in [0,\pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 10.2.

$$\begin{aligned}&u_t = 2\, u_{xx} \qquad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi)\\&u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\&u(0,x) = x^2\, (\pi - x)^2 \quad \forall\, x \in [0,\pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 10.3.

$$\begin{aligned}&u_t = u_{xx} + t\, \tfrac{\pi - x}{\pi} \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi)\\&u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\&u(0,x) = 1 \quad \forall\, x \in [0,\pi].\end{aligned}$$

Άσκηση 10.4.

$$\begin{aligned}&u_t = u_{xx} + \cos^2(x) \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi),\\&u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,\pi) = t \quad \forall\, t > 0,\\&u(0,x) = \tfrac{1}{2}\, \cos(2x) \quad \forall\, x \in [0,\pi].\end{aligned}$$

Υπόδειξη. Για δοθέν $t \geq 0$, βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση $p = p(x)$ η οποία να είναι τρίτου βαθμού και τέτοια ώστε: $p'(0) = 0$ και $p'(\pi) = t$. (Φυσικά οι συντελεστές του p θα εξαρτώνται από τη μεταβλητή t.)

Άσκηση 10.5.

$$\begin{aligned}&u_t = u_{xx} + u_x \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi),\\&u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\&u(0,x) = \sin(3x) \quad \forall\, x \in [0,\pi].\end{aligned}$$

Δείξτε, με τη μέθοδο της ενέργειας, ότι η λύση ειναι μοναδική.

Γ. Ζουράρης