Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2018
Φυλλαδιο Εργαστηριου 12
Πεμπτη 17/5/2018

Άσκηση 12.1 Βρείτε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + u_x \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi),\\ &u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\ &u(0,x) = u_0(x) \quad \forall\, x \in [0,\pi], \end{aligned}$$

με $u_0(x) := x\,(x-\pi)$.

Υπόδειξη. Ορίστε συνάρτηση $w(t,x) = e^{g(x)}\,u(t,x)$ και βρείτε το αντίστοιχο πρόβλημα για την w. Στη συνέχεια βρείτε κατάλληλη συνάρτηση g έτσι ώστε η ΜΔΕ ως προς w να μην περιέχει όρο με με μερική παράγωγο πρώτης τάξης ως προς x. Τέλος, βρείτε τη λύση w με τη μέθοδο Fourier.

Σημείωση. Για λιγότερες πράξεις μπορείτε να επιλέξετε τη συνάρτηση $u_0(x) = e^{-\frac{x}{2}}\,x\,(x-\pi)$ ως αρχική συνθήκη.

Άσκηση 12.2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Fourier, βρείτε τη λύση u του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + x \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi),\\ &u_x(t,0) = u(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\ &u(0,x) = \sin^2(x) \quad \forall\, x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Σημείωση. $\cos(2x) = 1 - 2\,\sin^2(x)$.

Άσκηση 12.3. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Fourier, βρείτε τη λύση u του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = u_{xx} + u_t + t\,x \quad \forall\, t > 0,\ x \in (0,\pi),\\ &u_x(t,0) = 0, \quad u_x(t,\pi) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\ &u(0,x) = \cos(x), \quad u_t(0,x) = 0 \quad \forall\, x \in [0,\pi]. \end{aligned}$$

Άσκηση 12.4. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο Fourier, βρείτε τη λύση u του ακόλουθου προβλήματος αρχικών τιμών και συνοριακών συνθηκών για την εξίσωση της θερμότητας:

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + x \quad \forall\, t > 0,\ x \in (1,2),\\ &u(t,1) = u(t,2) = 0 \quad \forall\, t > 0,\\ &u(0,x) = (x-1)\,(x-2) \quad \forall\, x \in [1,2]. \end{aligned}$$

Υπόδειξη. Με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής μετατρέψτε το διάστημα της μεταβλητής x από $[1,2]$ σε $[0,1]$ ή $[0,\pi]$.

Γ. Ζουράρης