Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΜΕΜ-271 Διαφορικες Εξισωσεις
Εαρινο Εξαμηνο 2018
Εργαστηριο Ασκησεων 2

Ομάδα Α

Άσκηση Ε2.1. Δίνεται η ΣΔΕ

$$[\,g_1(t)+g_2(y(t))\,]+[\,g_3(t)+g_4(y(t))\,]\;y'(t)=0,$$

όπου $g_1, g_2, g_3, g_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Βρείτε μια συνθήκη που να εξασφαλίζει ότι η ΣΔΕ είναι πλήρης.

Άσκηση Ε2.2. Δίνεται η ΣΔΕ

$$\left[\,4\,t^3+3\,y(t)\,\right]+\left[\,3\,t+4\,y^3(t)\,\right]\;y'(t)=0.$$

Βρείτε τη λύση της σε κλειστή μορφή.

Άσκηση Ε2.3. Δίνεται η ΣΔΕ

$$y(t)+\left[2\,t-y(t)\,e^{y(t)}\right]\;y'(t)=0.$$

Βρείτε τη λύση της σε κλειστή μορφή.

Υπόδειξη. Εξετάστε αν η ΣΔΕ είναι πλήρης. Αν δεν είναι αναζητήστε ολοκληρωτικό παράγοντα που να ειναι συνάρτηση μίας μεταβλητής.

Άσκηση Ε2.4 : Έστω $a,\, b\in\mathbb{R}$, με $a<b$. Βρείτε για ποιά διαστήματα (a,b) υπάρχουν συναρτήσεις $y:(a,b)\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο (a,b) και είναι λύσεις της συνήθους διαφορικής εξίσωσης:

$$\big(\,1+t^2+y^2(t)\,\big)-2\,t\,y(t)\,y'(t)=0\quad\forall\,t\in(a,b).$$

Υπόδειξη. Αναζητείστε ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t,y)=z(y^2-t^2)$.

Ομάδα Β

Άσκηση Ε2.5 : Έστω $a,\, b\in\mathbb{R}$, με $a<0<b$. Βρείτε συνάρτηση $y:(a,b)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και λύνει το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned}&y'(t)+3\,y(t)+6\,y^2(t)=0\quad\forall\,t\in(a,b),\\&y(0)=-1.\end{aligned}$$

Ποιό είναι το μεγαλύτερο διάστημα (a,b) στο οποίο ορίζεται η λύση y;

Υπόδειξη. Εφαρμόστε τη μεθοδολογία για εξισώσεις Bernoulli.

Άσκηση Ε2.6 : Έστω $a,\, b\in\mathbb{R}$, με $a<b$. Βρείτε συνάρτηση $y:(a,b)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (a,b) και λύνει την ακόλουθη ΣΔΕ Bernoulli:

$$\begin{aligned}&t\,y'(t)+y(t)=\ln(t)\,y^2(t)\quad\forall\,t\in(a,b),\\&y(t_0)=y_0,\end{aligned}$$

όπου $y_0\in\mathbb{R}$ και $t_0\in(a,b)$.

Γ. Ζουράρης