Τμημα Μαθηματικων
και Εφαρμοσμενων
Μαθηματικων,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΕΥΜ-107 Αριθμητικη Λυση ΜΔΕ
Εαρινο Εξαμηνο 2020
Ασκηση Εφαρμογης 1
Μια μεθοδος πεπερασμενων στοιχειων για ενα προβλημα δυο σημειων

1. Διατύπωση του προβλήματος. Έστω πραγματικοί αριθμοί a, b με $a < b$. Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα δύο σημείων: αναζητάμε συνάρτηση $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} -\,(p\,u')'(x) + q(x)\,u(x) &= f(x) \quad \forall\, x \in [a,b],\\ u(a) = u(b) &= 0, \end{aligned}$$

όπου $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $q \in C([a,b],\mathbb{R})$ με $q \geq 0$, και $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ με $p \geq p_0 > 0$ είναι γνωστές συναρτήσεις.

2. Περιγραφή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων. Έστω $J \geq 4$ φυσικός αριθμός που δίνεται από το χρήστη. Ορίζουμε το πλάτος της διαμέρισης $h := \frac{b-a}{J}$ για το διάστημα $[a,b]$. Οι αντίστοιχοι κόμβοι ορίζονται ως εξής: $x_j := a + j\,h$ για $j = 0,\dots,J$. Έπειτα ορίζουμε το χώρο πεπερασμένων στοιχείων:

$$S_h := \left\{ s \in C([a,b];\mathbb{R}) : \quad s(a) = s(b) = 0 \quad \text{και} \quad s\big|_{[x_j,x_{j+1}]} \in \mathbb{P}^1 \quad \text{για} \quad j = 0,\dots,J-1 \right\}$$

του οποίου η διάσταση είναι ίση με $J-1$. Η προσέγγιση πεπερασμένων στοιχείων $U \in S_h$ της u προσδιορίζεται από την απαίτηση (μεταβολική μορφή):

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b p(x)\,U'(x)\,\varphi'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,U(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \forall\,\varphi \in S_h.$$

Έστω $(\varphi_j)_{j=1}^{J-1}$ μια βάση του S_h. Τότε η ζητούμενη προσέγγιση U γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $(\varphi_j)_{j=1}^{J-1}$ με συντελεστές $(\lambda_j)_{j=1}^{J-1}$, δηλ.

$$\text{(2)} \qquad U(x) = \sum_{j=1}^{J-1} \lambda_j\,\varphi_j(x).$$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι τα $(\lambda_j)_{j=1}^{J-1}$ προσδιορίζονται ως λύση του γραμμικού συστήματος που περιγράφεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\text{(3)} \qquad \sum_{j=1}^{J-1} \lambda_j \left(\int_a^b p(x)\,\varphi_j'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx \right) = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

για $i = 1,\dots,J-1$.

Αν $A \in \mathbb{R}^{(J-1)\times(J-1)}$ είναι ο πίνακας του γραμμικού συστήματος, $\lambda = (\lambda_j)_{j=1}^{J-1}$ το διάνυσμα των αγνώστων συντελεστών και $\beta \in \mathbb{R}^{J-1}$ το σταθερό διάνυσμα, τότε

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_a^b p(x)\,\varphi_j'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx + \int_a^b q(x)\,\varphi_j(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad i,j = 1,\dots,J-1,\\ \beta_i &= \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad i = 1,\dots,J-1. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας τη συνήθη βάση του S_h, η οποία αποτελείται από τις συναρτήσεις:

$$\text{(4)} \qquad \varphi_\ell(x) := \begin{cases} \frac{x - x_{\ell-1}}{h} & x \in [x_{\ell-1}, x_\ell] \\ \frac{x_{\ell+1} - x}{h} & x \in [x_\ell, x_{\ell+1}] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad \forall\, x \in [a,b], \quad \ell = 1,\dots,J-1,$$

ο πίνακας A είναι τριδιαγώνιος με στοιχεία

$$A_{i,i} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} p(x)\,(\varphi_i'(x))^2\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} q(x)\,(\varphi_i(x))^2\,dx, \quad i=1,\dots,J-1,$$

$$A_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)\,\varphi_{i+1}'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)\,\varphi_{i+1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad i=1,\dots,J-2,$$

$$A_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} p(x)\,\varphi_{i-1}'(x)\,\varphi_i'(x)\,dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} q(x)\,\varphi_{i-1}(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad i=2,\dots,J-1,$$

και το σταθερό διάνυσμα β έχει στοιχεία:

$$\beta_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)\,\varphi_i(x)\,dx, \quad i=1,\dots,J-1.$$

3. Αντικείμενο. Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει την προσέγγιση $U\in S_h$ της u, με την έννοια του προσδιορισμού των συντελεστών $(\lambda_\ell)_{\ell=1}^{J-1}$ ως προς τη **συνήθη βάση** (βλ. (2) και (4)) κάτι που επιτρέπει τον υπολογισμό των τιμών της U.

Για τον υπολογισμό της λύσης του τριδιαγώνιου γραμμικού συστήματος

$$A\,\lambda = \beta$$

να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο Cholesky, η οποία βρίσκει κάτω τριγωνικό πίνακα L τέτοιο ώστε: $LL^T = A$. Αυτό είναι εφικτό επειδή ο πίνακας A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Επιπλέον, επειδή ο πίνακας A είναι τριδιαγώνιος ο πίνακας είναι διδιαγώνιος δηλ. έχει μη μηδενική τη διαγώνιο και την πρώτη υποδιαγώνιο.

Για την προσέγγιση των ολοκληρωμάτων που εμφανίζονται στα στοιχεία του πίνακα A και του σταθερού διανύσματος β, εφαρμόστε τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης του Simpson πάντα σε υποδιαστήματα $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ της διαμέρισης όπου $\kappa\in\{1,\dots,J-1\}$, δηλ.

$$\int_{x_{\kappa-1}}^{x_\kappa} g(x)\,dx \simeq \tfrac{x_\kappa - x_{\kappa-1}}{6}\,\left[g(x_{\kappa-1}) + 4\,g\left(\tfrac{x_{\kappa-1}+x_\kappa}{2}\right) + g(x_\kappa)\right].$$

4. Αποτελέσματα. Δοκιμάστε το πρόγραμμά σας με τα ακόλουθα δεδομένα: $a=0$, $b=5$, $p(x)=1+x^2$, $q(x)=\sin^2(x)$. Υπολογίστε τη συνάρτηση f που αντιστοιχεί στην ακριβή λύση

$$u(x) = x^2\,(x-5)^2.$$

Επίσης, για να ελέγξετε ότι έχετε υλοποιήσει σωστά τον αλγόριθμο, φτιάξτε το πρόγραμμά σας έτσι ώστε να υπολογίζει και να τυπώνει στην οθόνη το σφάλμα προσέγγισης:

$$\mathcal{E}(J) := \left(\int_a^b |U-u|^2\,dx\right)^{\frac12},$$

το οποίο να υπολογίσετε χρησιμοποιώντας αριθμητική ολοκλήρωση με τη μέθοδο Simpson. Ποιά είναι η *πειραματική τάξη* σύγκλισης;

5. Πειραματική τάξη σύγκλισης. Για διαφορετικές τιμές J_1 και J_2 του J, υπολογίζουμε τα αντίστοιχα σφάλματα $\mathcal{E}(J_1)$ και $\mathcal{E}(J_2)$, και την αντίστοιχη πειραματική τάξη θα είναι

$$O_{12} := \tfrac{\log(\mathcal{E}(J_1)/\mathcal{E}(J_2))}{\log(J_2/J_1)}.$$

Στην πράξη αρκεί να διαλέξουμε μια τιμή $J_0\in\mathbb{N}$ και στη συνέχεια $J_\ell = 2^\ell\,J_0$ για $\ell=1,\dots,m$, όπου $m\geq 4$. Έπειτα, υπολογίζουμε τις αντίστοιχες πειραματικές τάξεις $O_{\ell,\ell+1}$ για $\ell=1,\dots,m-1$, και συγκρίνουμε με το τι προβλέπει η διαθέσιμη εκτίμηση σφάλματος.

Γ. Ζουράρης