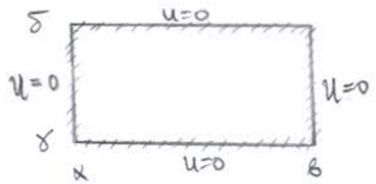
Άσκηση Εφαρμογής 2

Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών για την εξίσωση Poisson.

1. Διατύπωση προβλήματος:

Έστω $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$, $\mathring{D}=(\alpha,\beta)\times(\gamma,\delta)$ και $D=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$. Ας είναι $u: D\to\mathbb{R}$ η λύση του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)+a_0(x,y)\,u(x,y)=f(x,y) \qquad \forall (x,y)\in \mathring{D}$$



$$u|_{\partial D}=0.$$

για την οποία υποθέτουμε ότι $u\in C^{4,4}_{x,y}(D)$. Εδώ $f: D\to\mathbb{R}$ και $a_0: D\to\mathbb{R}$ με $a_0\ge 0$, γνωστές συναρτήσεις.

2. Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

Έστω $J_1,J_2\ge 2$, $\Delta x=\frac{\beta-\alpha}{J_1}$, $\Delta y=\frac{\delta-\gamma}{J_2}$, $x_i=\alpha+i\Delta x$ για $i=0,\dots,J_1$, $y_j=\gamma+j\Delta y$ για $j=0,\dots,J_2$.
Επιπλέον ορίζουμε: $I=\{(i,j)\in\mathbb{N}_0^2:\ 0\le j\le J_1,\ 0\le j\le J_2\}$ και $\mathring{I}=\{(i,j)\in I:\ 1\le i\le J_1-1,\ 1\le j\le J_2-1\}$. Η μέθοδος πεπερασμένων διαφορών κατασκευάζει προσέγγιση U_{ij} της $u(x_i,y_j)$ για κάθε $(i,j)\in I$, ως εξής:

$$\frac{U_{i+1,j}-2U_{i,j}+U_{i-1,j}}{\Delta x^2}+\frac{U_{i,j+1}-2U_{i,j}+U_{i,j-1}}{\Delta y^2}=f(x_i,y_j) \qquad \forall (i,j)\in\mathring{I}$$

$$U_{ij}=0 \qquad \forall (i,j)\in I\setminus\mathring{I}.$$

3. Υλοποίηση:

Υλοποιήσατε την μέθοδο σε ένα πρόγραμμα χρησιμοποιώντας μια γλώσσα προγραμματισμού. Το γραμμικό σύστημα που προκύπτει να λυθεί με τη μέθοδο των συζυγών κλίσεων. Να λάβετε υπόψιν σας ότι ο πίνακας είναι αραιός και να δεσμεύετε μνήμη μόνο για τα μηδενικά στοιχεία π.χ. αποθηκεύοντας τις διαγωνίους ως στήλες.

4. Έλεγχος αποτελεσμάτων

Έστω $a_0(x,y) = 1+\cos^2(x+y)$ $\forall (x,y)\in D$ και βρείτε την f έτσι ώστε η συνάρτηση $u(x,y) = \sin(\pi(x-\alpha)(x-\beta)(y-\gamma)(y-\delta))$ να είναι ακριβής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών. Για τον υπολογισμό της πειραματικής τάξης σύγκλισης επιλέγουμε $J_1=J_0\nu$, $J_2=\tilde{J}_0\nu$ για $J_0=5$, $\tilde{J}_0=6$ και $\nu=2^\ell$ για $\ell=1,2,3,4,5,6$. Τότε

$$\max_{(i,j)\in\mathring{I}} |U_{ij}-u(x_i,y_j)| \le C\,\frac{1}{\nu^2}$$

Για δύο διαφορετικές τιμές ν_1,ν_2 και αντίστοιχα σφάλματα E_1,E_2 η αντίστοιχη πειραματική τάξη σύγκλισης είναι:

$$O_{\nu_1,\nu_2} := \frac{\log(E_1/E_2)}{\log(\nu_2/\nu_1)}.$$

Γ. Ζουράκης

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ CG method : $Ax=b$

A symmetric and positive definite.
$A\in\mathbb{R}^{M\times M}$

Αρχικές τιμές: $r_0=-b$, $x_0=0$

Loop: $n=0,\dots,M-1$

αν $r_n=0$ τότε ~~στοπ~~ διαφορετικά

$$x_{n+1}=x_n+\alpha_n d_n$$
$$r_{n+1}=r_n+\alpha_n A d_n$$

όπου: $\alpha_n=\dfrac{(r_n,r_n)_2}{(Ad_n,d_n)_2}$

$$d_n=\begin{cases} -r_n+\dfrac{(r_n,r_n)_2}{(r_{n-1},r_{n-1})_2}\,d_{n-1}, & \text{όταν } n\ge 1\\ -r_0 & \text{όταν } n=0\end{cases}$$

Εδώ: $(x,y)_2=\sum_{i=1}^{M} x_i y_i$, $x,y\in\mathbb{R}^M$. Ο αλγόριθμος τερματίζει σε πολύ M επαναλήψεις.