Τμημα Χημειας,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΧΗΜ-011 Μαθηματικα Ι
Χειμερινο Εξαμηνο 2012
Ασκησεις 4

Άσκηση 4.1: Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:
α) $\int_0^1 x\sin(2x^2)\,dx$, β) $\int_0^1 x^3\,(x^4-1)^2\,dx$, γ) $\int_1^2 \frac{1}{x^2}\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$,
(δ) $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{5\,x+8}}\,dx$, (ε) $\int_0^1 \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\,\cos(x-1)\,dx$.

Άσκηση 4.2: Έστω συναρτήσεις f, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,b]$. Δείξτε ότι:
α) Υπάρχει $y\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f^2(y)=\tfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

β) Αν N είναι ένας θετικός ακέραιος και $(x_i)_{i=1}^N$ οποιαδήποτε επιλογή στοιχείων του $[a,b]$ τότε υπάρχει $z\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f(z)=\tfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$

γ) Αν $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[a,b]$, τότε υπάρχει $c\in[a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx=f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Άσκηση 4.3: Έστω συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής

$$f(x):=\begin{cases} 3\,x, & x\in[0,\frac{1}{2}),\\ 2, & x=\frac{1}{2}, \\ -2\,x+\frac{5}{2}, & x\in[\frac{1}{2},1], \end{cases}\qquad \forall\,x\in[0,1].$$

Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x)\,dx$ χρησιμοποιώντας: (α) τον κανόνα του τραπεζίου και (β) τον κανόνα του μέσου.

Άσκηση 4.4: Δίνονται συναρτήσεις $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ και $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=1+3\,x$. Υπολογίστε το εμβαδό της περιοχής που βρίσκεται πάνω από την f και κάτω από την g.

Άσκηση 4.5: Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$. Αν ξέρετε ότι

$$\forall\,x\in[0,+\infty):\quad \int_0^{x^2} f(s)\,ds=x\,\cos(x\,\pi)$$

βρείτε την τιμή $f(4)$.

Άσκηση 4.6: Έστω συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$. Αν ξέρετε ότι

$$\forall\,x\in[0,+\infty):\quad \int_0^{f(x)} s^2\,ds=x\,\cos(x\,\pi)$$

βρείτε την τιμή $f(4)$.

Άσκηση 4.7: Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\forall\,x\in[0,+\infty):\quad f(x)=\int_x^{x+3} t\,(t-5)\,dt.$$

Βρείτε για ποιά τιμή του x η f παίρνει μέγιστη τιμή.

Γ. Ζουράρης