

Άσκηση 6.1: Υπολογίστε τις σειρές:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{4^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^n}\right), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{5^n}.$$

Άσκηση 6.2: Υπολογίστε τις σειρές:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2n}{n^2(1+n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}.$$

Άσκηση 6.3: Βρείτε για ποιό $b \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nb} = 9.$$

Άσκηση 6.4: Έστω μια ακολουθία $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ μη αρνητικών όρων, δηλ. $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο \mathbb{R} , τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2$ συγκλίνει στο \mathbb{R} .

Άσκηση 6.5: Για κάθε μία από τις παρακάτω σειρές προσδιορίστε την οριακή συμπεριφορά τους (δηλ. αν συγκλίνουν στο \mathbb{R} , ή αν συγκλίνουν στο $+\infty$ ή $-\infty$, ή αν δεν συγκλίνουν):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(n))^n}{n^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln(n))^n}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+\sqrt{k}}{k^3+\sqrt{k}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^k}{\sqrt{k}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}, \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+(\ln(n))^2)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right), \\ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{5^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln(n)}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^3}. \end{aligned}$$

Άσκηση 6.6: Δείξτε ότι: για κάθε $a > 0$ ισχύει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln(a).$$

Άσκηση 6.7: Βρείτε για ποιά $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(ax) - b}{2x^2} = -4.$$

Άσκηση 6.8: Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$. Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(s) ds}{x}.$$

Άσκηση 6.9: Υπολογίστε τα παρακάτω όρια:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sin(\sqrt{x})}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n[\ln(n+1) - \ln(n)]}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}, \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^{5x} - x}{1 - \cos(5x)}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^4)^{\frac{1}{\ln(x)}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(n))^{\frac{1}{n}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x}. \end{aligned}$$