

Άσκηση 7.1: Έστω $A = (1, 2, 4)$ και $B = (-1, 0, 3)$ δύο σημεία στο χώρο.

- α) Βρείτε μια παραμετρική παράσταση της ευθείας που παίρνει από τα σημεία A και B .
- β) Βρείτε μια παραμετρική παράσταση του ευθύγραμμου τμήματος με αρχή το A και τέλος το B .
- γ) Βρείτε μια παραμετρική παράσταση της ευθείας που παίρνει από το B και είναι κάθετη στην ευθεία που παίρνει από τα A και B .
- δ) Ποιό είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα A και B ;

Άσκηση 7.2: Έστω $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ και $k = (0, 0, 1)$. Βρείτε τα ακόλουθα:

$$(i + j) \times (i - j), \quad j \cdot (i \times k), \quad (i + j) \times k.$$

Άσκηση 7.3: Έστω διανύσματα $a = (1, 3, -1)$ και $b = (3, 0, 1)$. Προσδιορίστε ένα διάνυσμα $c \in \mathbb{R}^3$ τέτοιο ώστε $a \cdot c = 0$ και $b \cdot c = 0$.

Άσκηση 7.4: Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Δείξτε ότι

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

Άσκηση 7.5: Δίνεται η καμπύλη $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $r(t) = (t, 1 + t^2)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα σημεία της καμπύλης στα οποία τα $r(t)$ και $r'(t)$ είναι κάθετα.

Άσκηση 7.6: Δίνεται η καμπύλη $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $r(t) = (t^2 - t + 1, t^3 - t + 2, \sin(\pi t))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η καμπύλη τέμνει τον εαυτό της στο σημείο $P = (1, 2, 0)$, και βρείτε τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο P .

Άσκηση 7.7: Δίνεται η καμπύλη $r : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $r(t) = (2 \cos(t), 3 \sin(t), 4t)$ για κάθε $t \geq 0$. Βρείτε $t_0 > 0$ τέτοιο ώστε το μήκος της καμπύλης r από το αρχικό σημείο $r(0)$ μέχρι το $r(t_0)$ να είναι ίσο με 5π .

Τροποποίηση: Ο παραπάνω τύπος οδηγεί σε ολοκλήρωμα που δεν μπορεί να υπολογιστεί σε κλειστή μορφή. Δοκιμάστε να λύσετε την άσκηση με: $r(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t), 4t)$ για κάθε $t \geq 0$.

Γ. Ζουράρης