Τμημα Χημειας,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΧΗΜ-011 Μαθηματικα Ι
Χειμερινο Εξαμηνο 2012
Ενδιαμεσο Διαγωνισμα
5/12/2012
Α

Άσκηση Α.1: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (x-3)(x-1)(x-2)\ dx$$

με τη χρήση του κανόνα του Simpson.

Λύση. Έστω $f(x) := (x-1)(x-2)(x-3)$ για κάθε $x \in [0, \frac{1}{2}]$, και $I = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx$. Ο κανόνας του Simpson υπολογίζει ακριβώς την τιμή I επειδή η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, και δίνει

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{\frac{1}{2}-0}{6}\ \big[\, f(0) + 4\, f(\tfrac{1}{4}) + f(\tfrac{1}{2}) \,\big] = -\tfrac{1}{12}\ \big(\, 6 + 4\, \tfrac{231}{64} + \tfrac{15}{8} \,\big) \\ &= -\ \tfrac{1}{12}\ \big(\, 21 + \tfrac{7}{16} + \tfrac{7}{8} \,\big) = -\tfrac{1}{12}\ \big(\, 21 + \tfrac{21}{16} \,\big) = \tfrac{119}{64}. \end{aligned}$$

Άσκηση Α.2: Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin^2(x)}.$$

Λύση. Έστω $f(x) = x^{\sin^2(x)}$ για κάθε $x > 0$. Τότε $f(x) = e^{g(x)}$ όπου $g(x) = \ln(x)\,\sin^2(x)$ για κάθε $x > 0$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2\sin(x)\,\cos(x)}{\sin^4(x)}} = -\tfrac{1}{2}\ \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin^3(x)}{x\,\cos(x)} \\ &= -\ \tfrac{1}{2}\ \lim_{x\to 0} \tfrac{3\,\sin^2(x)\,\cos(x)}{\cos(x) - x\,\sin(x)} = 0. \end{aligned}$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1.$$

Άσκηση Α.3: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_0^1 x\,\arctan(x^2)\,dx, \quad \int_0^1 \tfrac{x}{4\,x^2+x+1}\,dx.$$

Λύση.

α) Έστω $I_1 = \int_0^1 x\,\arctan(x^2)\,dx$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \big(x^2\big)'\,\arctan(x^2)\,dx = \tfrac{1}{2}\left[\arctan(1) - 2\int_0^1 \tfrac{x^3}{1+x^4}\,dx\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\arctan(1) - \tfrac{1}{2}\int_0^1 \big(\ln(1+x^4)\big)'\,dx\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\ \big[\, \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\,\ln(2) \,\big]. \end{aligned}$$

β) Θέτοντας $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{4\,x^2+x+1}\,dx$, έχουμε:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\left(2x+\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}\,dx = \frac{16}{15}\int_0^1 \frac{x}{\left(\frac{4}{\sqrt{15}}\,(2x+\frac{1}{4})\right)^2+1}\,dx.$$

Στη συνέχεια αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας $y = \frac{4}{\sqrt{15}}\,(2x + \frac{1}{4})$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{16}{15}\,\tfrac{1}{8}\,\tfrac{\sqrt{15}}{8}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{9}{\sqrt{15}}} \tfrac{\sqrt{15}\,y-1}{y^2+1}\,dy = \tfrac{1}{4\sqrt{15}}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{9}{\sqrt{15}}} \tfrac{\sqrt{15}\,y-1}{y^2+1}\,dy \\
&= \tfrac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{9}{\sqrt{15}}} \tfrac{y}{y^2+1}\,dy - \tfrac{1}{4\sqrt{15}}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{9}{\sqrt{15}}} \tfrac{1}{y^2+1}\,dy \\
&= \tfrac{1}{8}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{9}{\sqrt{15}}} \left(\ln(1+y^2)\right)'\,dy - \tfrac{1}{4\sqrt{15}}\int_{\frac{1}{\sqrt{15}}}^{\frac{9}{\sqrt{15}}} (\arctan(x))'\,dy \\
&= \tfrac{1}{8}\,\left[\ln\left(\tfrac{96}{15}\right) - \ln\left(\tfrac{16}{15}\right)\right] - \tfrac{1}{4\sqrt{15}}\left[\arctan\left(\tfrac{9}{\sqrt{15}}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{15}}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{8}\,\ln(6) - \tfrac{\sqrt{15}}{60}\left[\arctan\left(\tfrac{3\sqrt{15}}{5}\right) - \arctan\left(\tfrac{\sqrt{15}}{15}\right)\right].
\end{aligned}$$

Άσκηση Α.4: Υπολογίστε τη σειρά

$$\sum_{n=3}^{\infty} e^{-n}$$

Λύση. Έστω $S = \sum_{n=3}^{\infty} e^{-n}$. Τότε, έχουμε τα ακόλουθα

$$S = \tfrac{1}{e^3}\sum_{n=3}^{\infty} e^{-(n-3)} = \tfrac{1}{e^3}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} = \tfrac{1}{e^3}\,\tfrac{1}{1-\frac{1}{e}} = \tfrac{1}{e^2\,(e-1)}.$$

Άσκηση Α.5: Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $P_2(x)$ γύρω από το $x_0 = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = e^{\frac{x}{2}}.$$

Λύση. Έχουμε $P_2(x) = f(0) + x\,f'(0) + \frac{x^2}{2}\,f''(0)$. Επειδή $f'(x) = \frac{1}{2}\,e^{\frac{x}{2}}$ και $f''(x) = \frac{1}{4}\,e^{\frac{x}{2}}$, έχουμε τελικά $P_2(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$.

Γ. Ζουράρης