Τμημα Χημειας,
Πανεπιστημιο Κρητης,
Ηρακλειο Κρητης

ΧΗΜ-011 Μαθηματικα Ι
Χειμερινο Εξαμηνο 2012
Ενδιαμεσο Διαγωνισμα
5/12/2012
Β

Άσκηση Β.1: Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{3}{4}} (x-1)(x-5)(x-3)\ dx$$

με τη χρήση του κανόνα του Simpson.

Λύση. Έστω $f(x) := (x-1)(x-3)(x-5)$ για κάθε $x \in [0, \frac{3}{4}]$, και $I = \int_0^{\frac{3}{4}} f(x)\ dx$. Ο κανόνας του Simpson υπολογίζει ακριβώς την τιμή I επειδή η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, και δίνει

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{\frac{3}{4}-0}{6}\ \left[f(0) + 4\, f(\tfrac{3}{8}) + f(\tfrac{3}{4}) \right] = -\tfrac{1}{8}\ \left(15 + 4\, \tfrac{3885}{512} + \tfrac{153}{64} \right) \\ &= -\tfrac{1}{8}\ \left(47 + \tfrac{45}{128} + \tfrac{25}{64} \right) = -\tfrac{1}{8}\ \left(47 + \tfrac{95}{128} \right) \cdot \end{aligned}$$

Άσκηση Β.2: Υπολογίστε το όριο

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin^3(x)}.$$

Λύση. Έστω $f(x) = x^{\sin^3(x)}$ για κάθε $x > 0$. Τότε $f(x) = e^{g(x)}$ όπου $g(x) = \ln(x)\, \sin^3(x)$ για κάθε $x > 0$. Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} g(x) &= \lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin^3(x)}} = \lim_{x\to 0} \tfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{3\sin^2(x)\, \cos(x)}{\sin^6(x)}} = -\tfrac{1}{3}\ \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin^4(x)}{x\, \cos(x)} \\ &= -\tfrac{1}{3}\ \lim_{x\to 0} \tfrac{4\, \sin^3(x)\, \cos(x)}{\cos(x) - x\, \sin(x)} = 0. \end{aligned}$$

Επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1.$$

Άσκηση Β.3: Υπολογίστε τα ολοκλήρωματα

$$\int_0^1 x\, \arctan(x^2)\ dx, \quad \int_0^1 \tfrac{x}{2\,x^2+x+1}\ dx.$$

α) Έστω $I_1 = \int_0^1 x\, \arctan(x^2)\ dx$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} I_1 &= \tfrac{1}{2}\ \int_0^1 \left(x^2\right)'\, \arctan(x^2)\ dx = \tfrac{1}{2}\ \left[\arctan(1) - 2 \int_0^1 \tfrac{x^3}{1+x^4}\ dx \right] \\ &= \tfrac{1}{2}\ \left[\arctan(1) - \tfrac{1}{2}\ \int_0^1 \left(\ln(1+x^4)\right)'\ dx \right] \\ &= \tfrac{1}{2}\ \left[\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2}\ \ln(2) \right]. \end{aligned}$$

β) Θέτοντας $I_2 = \int_0^1 \frac{x}{2\,x^2+x+1}\ dx$, έχουμε:

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{\left(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{7}{8}}\ dx = \frac{8}{7}\ \int_0^1 \frac{x}{\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\ (\sqrt{2}\, x + \frac{1}{2\sqrt{2}})\right)^2 + 1}\ dx.$$

Στη συνέχεια αλλάζουμε μεταβλητή θέτοντας $y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\,(\sqrt{2}x + \frac{1}{2\sqrt{2}})$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
I_2 &= \tfrac{8}{7}\,\tfrac{1}{4}\,\tfrac{\sqrt{7}}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} \tfrac{\sqrt{7}\,y-1}{y^2+1}\,dy = \tfrac{1}{2\sqrt{7}}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} \tfrac{\sqrt{7}\,y-1}{y^2+1}\,dy\\
&= \tfrac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} \tfrac{y}{y^2+1}\,dy - \tfrac{1}{2\sqrt{7}}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} \tfrac{1}{y^2+1}\,dy\\
&= \tfrac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} \big(\ln(1+y^2)\big)'\,dy - \tfrac{1}{2\sqrt{7}}\int_{\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\frac{5}{\sqrt{7}}} (\arctan(x))'\,dy\\
&= \tfrac{1}{4}\,\left[\ln\left(\tfrac{32}{7}\right) - \ln\left(\tfrac{8}{7}\right)\right] - \tfrac{1}{2\sqrt{7}}\left[\arctan\left(\tfrac{5}{\sqrt{7}}\right) - \arctan\left(\tfrac{1}{\sqrt{7}}\right)\right]\\
&= \tfrac{1}{2}\,\ln(2) - \tfrac{\sqrt{7}}{14}\left[\arctan\left(\tfrac{5\sqrt{7}}{7}\right) - \arctan\left(\tfrac{\sqrt{7}}{7}\right)\right].
\end{aligned}$$

Άσκηση Β.4: Υπολογίστε τη σειρά

$$\sum_{n=2}^{\infty}\pi^{-n}$$

Λύση. Έστω $S = \sum_{n=2}^{\infty}\pi^{-n}$. Τότε, έχουμε τα ακόλουθα

$$S = \tfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=2}^{\infty}\pi^{-(n-2)} = \tfrac{1}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\pi^{-n} = \tfrac{1}{\pi^2}\,\tfrac{1}{1-\frac{1}{\pi}} = \tfrac{1}{\pi\,(\pi-1)}.$$

Άσκηση Β.5: Βρείτε το πολυώνυμο Taylor $P_4(x)$ γύρω από το $x_0 = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \cos\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

Λύση. Έχουμε:

$$P_4(x) = f(0) + x\,f'(0) + \tfrac{x^2}{2}\,f''(0) + \tfrac{x^3}{6}\,f'''(0) + \tfrac{x^4}{24}\,f''''(0).$$

Επειδή $f'(x) = -\frac{1}{2}\,\sin(\frac{x}{2})$, $f''(x) = -\frac{1}{4}\,\cos(\frac{x}{2})$, $f'''(x) = \frac{1}{8}\,\sin(\frac{x}{2})$, και $f''''(x) = \frac{1}{16}\,\cos(\frac{x}{2})$, έχουμε τελικά

$$P_4(x) = 1 - \tfrac{x^2}{8} + \tfrac{x^4}{384}.$$

Γ. Ζουράρης