Θ Ε Ω Ρ Ι Α   Π Ρ Ο Σ Ε Γ Γ Ι Σ Ε Ω Ν

Γ.Δ. Ακρίβης

Μαθηματικό Τμήμα

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Ηράκλειο 1987

1. Εισαγωγή: Βασικές έννοιες για σταθμητούς χώρους

Σ' αυτό το μάθημα θα εργαζόμαστε σε πραγματικούς γραμμικούς χώρους. Θυμίζουμε τον από την Γραμμική Άλγεβρα γνωστό ορισμό.

1.1 Ορισμός Ένας πραγματικός γραμμικός χώρος είναι μια τριάδα $(X,+,.)$ που συνίσταται από ένα σύνολο X, μια πράξη $+$ (πρόσθεση)

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x,y) \longmapsto x+y$$

και μια πράξη $.$ (πολλαπλασιασμός πραγματικών αριθμών με διανύσματα)

$$. : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$$
$$(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$$

για τις οποίες ισχύουν:

ΓΧ1 $(X,+)$ είναι αβελιανή ομάδα, δηλαδή

$\forall\, x,y,z\in X \qquad (x+y)+z=x+(y+z)$
$\exists\, 0\in X\ \forall\, x\in X \qquad 0+x=x$
$\forall\, x\in X\ \exists\, x'\in X \qquad x+x'=0 \qquad$ (συμβολισμός $x'=-x$)
$\forall\, x,y\ X \qquad x+y=y+x$

ΓΧ2 Για $x,y\in X$ και $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ισχύει

$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$
$\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$
$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$
$1x=x$

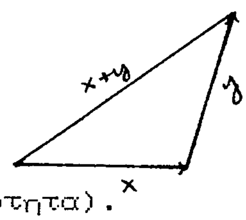
Αν οι πράξεις $+,.$ είναι προφανείς (ή χωρίς σημασία) τότε γράφουμε X αντί για $(X,+,.)$. Όταν στο εξής μιλάμε για γραμμικούς χώρους θα εννοούμε πάντα πραγματικούς γραμμικούς χώρους.

Γενικεύοντας την έννοια της απολύτου τιμής στον $\mathbb{R}$ σε έναν γραμμικό χώρο X έχουμε την δυνατότητα να μετράμε μήκη διανυσμάτων του X. Η γενίκευση αυτή μας οδηγεί στην γι' αυτό το μάθημα θεμελιώδη έννοια της στάθμης.

1.2 Ορισμός Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση

$$||.||: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ||x||$$

λέγεται στάθμη (norm, νόρμη, νόρμα), αν ισχύουν:



Σ1 $\quad x\in X \qquad ||x||=0 \iff x=0$
Σ2 $\quad \forall\, \lambda\in\mathbb{R}\ \ \forall\, x\in X \qquad ||\lambda x||=|\lambda|\ ||x||$
Σ3 $\quad \forall\, x,y\in X \qquad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (τριγωνική ανισότητα).

Ένας γραμμικός χώρος X στον οποίο έχει ορισθεί μία στάθμη λέγεται σταθμητός χώρος (ή χώρος με norm), συμβολισμός $(X,||.||)$.

Σημείωση: Από τα αξιώματα της στάθμης έπεται ότι για κάθε $x\in X$ ισχύει $||x||\geqslant 0$. Πραγματικά με $y:=-x$ έχουμε

$$0 = ||x-x|| \leqslant ||x|| + ||-x|| = ||x|| + ||x|| = 2||x||$$

όπου στην πρώτη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Σ3 και στην προτελευταία ισότητα την Σ2.

Παραδείγματα

1. $(\mathbb{R},||.||)$ με $\forall\, x\in\mathbb{R}$ $||x||:=|x|$.

2. Έστω $-\infty<a<b<+\infty$, $C[a,b]:=\{f\ /\ f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R},\ f$ συνεχής$\}$. Ο $C[a,b]$ με τις πράξεις $(f+\varphi)(x):=f(x)+\varphi(x)$, $(\lambda f)(x):=\lambda f(x)$ είναι ένας γραμμικός χώρος.

   Για $p\geqslant 1$ ορίζουμε $\forall\, f\in C[a,b]$ $||f||_p:=\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$,

   $||f||_\infty:=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ (για $f\in C[a,b]$ ισχύει προφανώς $||f||_p$, $||f||_\infty<+\infty$).

   Θα δείξουμε τώρα ότι για $1\leqslant p\leqslant+\infty$ ο $(C[a,b],||.||_p)$ είναι ένας σταθμητός χώρος.

i. $p=+\infty$

Ισχύουν:

Σ1 γιατί $f\in C[a,b]$ $||f||_\infty=0 \iff \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|=0 \iff f=0$.

Σ2 γιατί για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in C[a,b]$, $||\lambda f||_\infty=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\lambda f(x)| = |\lambda|\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| = |\lambda|\ ||f||_\infty$

Σ3 γιατί για $f,\varphi\in C[a,b]$

$$||f+\varphi||_\infty=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)+\varphi(x)|\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}[|f(x)|+|\varphi(x)|]\leqslant\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi(x)|=$$
$$=||f||_\infty+||\varphi||_\infty.$$

ii. $p=1$

Ισχύουν:

Σ1 γιατί $f\in C[a,b]$ $||f||_1=0 \iff \int_a^b|f(x)|dx=0 \iff f=0$.

Σ2 γιατί για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in C[a,b]$ $||\lambda f||_1=\int_a^b|\lambda f(x)|dx = |\lambda|\int_a^b|f(x)|dx = |\lambda|\ ||f||_1$.

Σ3 γιατί για $f,\varphi\in C[a,b]$

$$||f+\varphi|| = \int_a^b|f(x)+\varphi(x)|dx \leqslant \int_a^b[|f(x)|+|\varphi(x)|]dx =$$
$$=\int_a^b|f(x)|dx + \int_a^b|\varphi(x)|dx = ||f(x)||_1+||\varphi(x)||_1.$$

iii. $1<p<+\infty$

Κατ' αρχήν ισχύουν:

Σ1 γιατί $f\in C[a,b]$ $||f||_p=0 \iff \int_a^b|f(x)|^p dx = 0 \iff f=0$.

Σ2 γιατί για $\lambda\in\mathbb{R}$, $f\in C[a,b]$

$$||\lambda f||_p=\left(\int_a^b|\lambda f(x)|^p dx\right)^{1/p}=\left(\int_a^b|\lambda|^p|f(x)|^p dx\right)^{1/p}=|\lambda|\left(\int_a^b|f(x)|^p dx\right)^{1/p}=|\lambda|\ ||f||_p.$$

Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Hölder για ολοκληρώματα

$$\int_a^b |f(x)\varphi(x)|\,dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_a^b |\varphi(x)|^q dx\right)^{1/q} \qquad (= ||f||_p\,||\varphi||_q),$$

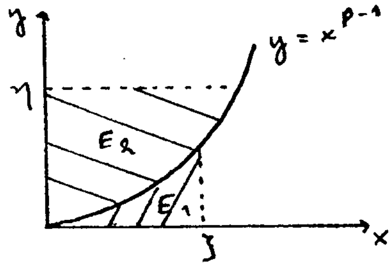
όπου $p>1$ και $1/p + 1/q = 1$.

Απόδειξη της ανισότητας του Hölder

Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα

(*) $$\xi\eta \leq \xi^p/p + \eta^q/q \ , \qquad \xi,\eta \geq 0$$

Γεωμετρική σημασία της (*) :



$$E1=\xi^p/p \ , \ E2=\eta^q/q \ , \ \xi\eta \leq E1+E2$$

Με $r:=\xi^p$, $s:=\eta^q$ η (*) γράφεται ισοδύναμα σαν

(**) $$r^{1/p} s^{1/q} \leq r/p + s/q.$$

Για $r=s$ η (**) είναι προφανής. Έστω χωρίς περιορισμό της γενικότητας $r>s$ (λόγω συμμετρίας). Η (**) γράφεται τότε

$$(r/s)^{1/p} \leq (1/p)(r/s) + (1/q) = 1+(1/p)(r/s -1) \qquad (\text{λόγω } 1/p + 1/q = 1).$$

Για $t>1$ έχουμε με $g(t):=t^{1/p}$, $g(t)=g(1)+(t-1)g'(\theta)$, $1<\theta<t$, δηλαδή

$$t^{1/p}=1+(1/p)(t-1)(1/\theta^{1-\frac{1}{p}}) < 1+(1/p)(t-1),$$ οπότε με $t:=r/s$

παίρνουμε το ζητούμενο.

Τώρα με $\xi:= |f(x)|/||f||_p$, $\eta:=|\varphi(x)|/||\varphi||_q$ από την (*) έχουμε

$$|f(x)\varphi(x)|/(||f||_p\,||\varphi||_q) \leq (|f(x)|^p/(p||f||_p))+(|\varphi(x)|^q/(q||\varphi||_q^q))$$

οπότε ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\int_a^b |f(x)\varphi(x)|dx\ /(||f||_p\,||\varphi||_q) \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\ /(p||f||_p^p)\right) + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^q dx\ /(q||\varphi||_q^q)\right) =$$

$$= 1/p + 1/q = 1.$$

Με την βοήθεια της ανισότητας του Hölder δείχνουμε τώρα την τριγωνική ανισότητα που στην προκειμένη περίπτωση λέγεται και <u>ανισότητα του Minkowski</u>.

Έχουμε

(***) $$\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^p dx \leq \int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^{p-1}|f(x)|dx + \ |f(x)+\varphi(x)|^{p-1}|\varphi(x)|dx$$

$$\leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{1/q} + \left(\int_a^b |\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^{q(p-1)} dx\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^{(p-1)q} dx\right) [\,||f||_p + ||\varphi||_p\,] = \left(\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^p dx\right)^{1/q} [\,||f||_p + ||\varphi||_p\,]$$

οπότε

$$\left(\int_a^b |f(x)+\varphi(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{p}} \leqslant ||f||_p + ||\varphi||_p$$

δηλαδή

$$||f+\varphi||_p \leqslant ||f||_p + ||\varphi||_p \quad \text{(ανισότητα του Minkowski).}$$

Σημείωση: Για να ισχύει ισότητα στην (*) πρέπει προφανώς να έχουμε $\xi^p = \eta^q$. Στην (***) ισχύει ισότητα αν $f(x)$, $\varphi(x)$ είναι ομόσημα. Εύκολα τώρα διαπιστώνουμε ότι ισότητα στην ανισότητα του Minkowski συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις είναι γραμμικά εξαρτημένες.

3. Έστω $w\in C[a,b]$ μια συνάρτηση βάρους, $\forall\, x\in[a,b]$ $w(x)>0$, και $p\geqslant 1$.

Με $\forall$ $f\in C[a,b]$ $||f||_{w,p} := \left(\int_a^b w(x)|f(x)|^p dx\right)^{1/p}$ ο $(C[a,b], ||.||_{w,p})$ είναι ένας σταθμητός χώρος. Η απόδειξη γίνεται όπως και στο δεύτερο παράδειγμα.

4. $(\mathbb{R}^n, ||.||_p)$ όπου $p\geqslant 1$ και για $x\in\mathbb{R}^n$ $||x||_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$ για $p<\infty$, και

$||x||_\infty := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$.

Η απόδειξη είναι και εδώ ανάλογη εκείνης του δεύτερου παραδείγματος.

Σε σταθμητούς χώρους μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της συγκλίσεως και συνεπώς και την έννοια μιας συνεχούς απεικονίσεως μεταξύ σταθμητών χώρων.

1.3 Ορισμός Έστω $(X, ||.||)$ ένας σταθμητός χώρος. Λέμε ότι μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ συγκλίνει πρός ένα στοιχείο $x\in X$, αν ισχύει

$$||x_n - x|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Όταν είναι προφανές ως προς ποιά στάθμη εννοούμε τη σύγκλιση, γράφουμε $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, διαφορετικά γράφουμε $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ στον $(X, ||.||)$.

1.4 Ορισμός Έστω $(X, ||.||)$, $(Y, ||.||')$ δύο σταθμητοί χώροι. Μία απεικόνιση $T: M \longrightarrow Y$, $M\subset X$, λέγεται συνεχής στο σημείο $x\in M$, αν:

$$\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset M,\ x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x \right) \implies T(x_n) \xrightarrow{n\to+\infty} T(x)$$

δηλαδή

$$\left(||x_n - x|| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right) \implies ||T(x_n) - T(x)||' \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Η T λέγεται συνεχής σ' ένα σύνολο $M_1\subset M$, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του M_1.

Θα γνωρίσουμε τώρα μερικά αποτελέσματα για συμπαγή σύνολα και συνεχείς συναρτήσεις ορισμένες σε συμπαγή σύνολα, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο για την απόδειξη υπάρξεως βελτίστων προσεγγίσεων.

1.5 Ορισμός Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος και $K \subset X$.

i. Το K λέγεται κλειστό, αν $\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K \ , \ x_n \xrightarrow{n\to+\infty} x \right) \Longrightarrow x \in K$ το όριο δηλαδή κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας του K ανήκει στο K.

ii. Το K λέγεται φραγμένο, αν $\exists c \ \forall x \in K \ \ ||x|| \leq c$.

iii. Το K λέγεται συμπαγές, αν κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ που το όριο της ανήκει στο K.

Παράδειγμα: Στον $(\mathbb{R},|.|)$ το σύνολο $[a,b]$ (όπου $-\infty<a<b<+\infty$) είναι κλειστό, φραγμένο και συμπαγές. Το σύνολο $[a,b)$ είναι φραγμένο αλλά μη κλειστό, το $\mathbb{R}$ είναι κλειστό αλλά μη φραγμένο.

1.6 Λήμμα Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος και K ένα συμπαγές υποσύνολο του X. Αν $M \subset K$ κλειστό, τότε το M είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. Τότε προφανώς $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ συνεπώς υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ και $x^* \in K$ τέτοια ώστε $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x^*$. Λόγω της κλειστότητας του M ισχύει όμως $x^* \in M$.

1.7 Πρόταση Έστω $(X,||.||)$, $(Y,||.||')$ σταθμητοί χώροι και $T:X \longrightarrow Y$ μια συνεχής απεικόνιση. Αν $K \subset X$ συμπαγές, τότε και $M:=T(K)$ ($:=\{y\in Y : \exists x \in K \ \ y=T(x)\}$) είναι συμπαγές.

(Η "συνεχής" εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγής).

Απόδειξη

Έστω $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$. Τότε αν $x_n \in K$ τέτοιο ώστε $y_n = T(x_n)$ λόγω της συμπάγειας του K η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ με $x_{n_k} \longrightarrow x^* \in K$. Λόγω της συνέχειας της T έχουμε τότε $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} T(x_{n_k}) = T(\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}) = T(x^*) \in M$.

Μια συνεχής συνάρτηση $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ λαμβάνει στο $[a,b]$ ως γνωστόν το μέγιστο και το ελάχιστο της. Μια γενίκευση αυτού του γεγονότος δίνεται αμέσως.

1.8 Πρόταση Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος, K ένα συμπαγές υποσύνολο του X και $f:K \longrightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση (στο K). Τότε υπάρχουν δύο σημεία x^*, x_* K τέτοια ώστε :

$$f(x^*) = \sup_{x\in K} f(x) \quad , \quad f(x_*) = \inf_{x\in K} f(x).$$

(Μια συνεχής συνάρτηση λαμβάνει σε κάθε συμπαγές σύνολο το μέγιστο και το ελάχιστό της).

Απόδειξη:

Έστω $M:=f(K)$. Τότε $\sup\limits_{x\in K} f(x) = \sup M$. Έστω $\alpha:=\sup M$. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ με $y_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha$. Λόγω της συμπάγειας του M ισχύει $\alpha<+\infty$ και $\alpha \in M$. Άρα $\exists \ x^* \in K \ \ f(x^*)=\alpha$. Για το inf θέσε $\varphi:=-f$ και χρησιμοποίησε το ήδη αποδειχθέν για την φ.

Θα δώσουμε τώρα μια αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα υποσύνολο ενός σταθμητού χώρου συμπαγές.

1.9 Λήμμα Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος και $K\subset X$. Αν K συμπαγές τότε το K είναι κλειστό και φραγμένο.

Απόδειξη

K κλειστό: Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset K$ με $x_n \longrightarrow x$. Τότε προφανώς κάθε υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει επίσης προς το x, λόγω της συμπάγειας του K ισχύει συνεπώς $x\in K$.

K φραγμένο: Λόγω $||x_n||\leq||x_n-x||+||x||$, έχουμε κατ' αρχήν ότι κάθε συγκλίνουσα ακολουθία σε έναν σταθμητό χώρο είναι φραγμένη. Έστω τώρα ότι το K δεν είναι φραγμένο, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset K$ με $||x_n||\geq n$. Τότε όμως κάθε υπακολουθία αυτής της ακολουθίας είναι μη φραγμένη, άρα μη συγκλίνουσα, άτοπο λόγω της συμπάγειας του K.

Το αντίστροφο του ανωτέρω λήμματος ισχύει μόνο σε χώρους πεπερασμένης διαστάσεως. Δίνουμε πρώτα την απόδειξη για μια ειδική περίπτωση.

1.10 Πρόταση (Heine-Borel) Κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $(\mathbb{R}^m,||.||_\infty)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Κατ' αρχήν δείχνουμε επαγωγικά ως προς m ότι το σύνολο,
$K_m:=\{x\in\mathbb{R}^m:\ ||x||_\infty\leq 1\}$ είναι συμπαγές.

m=1: Κάθε ακολουθία $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}\subset[-1,1]$ είναι φραγμένη, έχει συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Λόγω της κλειστότητας του $[-1,1]$ το όριο θα βρίσκεται στο $[-1,1]$, άρα το $[-1,1]$ είναι συμπαγές.

$m \rightarrow m+1$: Έστω $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}\subset K_{m+1}$. Γράφουμε τα στοιχεία του $\mathbb{R}^{m+1}$ στη μορφή $x=(y,x_{m+1})$, όπου το $y=(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m$. Τώρα έχουμε την ακολουθία $(y^{(n)},x^{(n)}_{m+1})$. Λόγω $(x^{(n)}_{m+1})_{n\in\mathbb{N}}\subset[-1,1]$ υπάρχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία της, έστω $(x^{(n_k)}_{m+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Σύμφωνα με την υπόθεση της επαγωγής η ακολουθία $(y^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}\subset K_m$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(y^{(n_{k_\mu})})_{\mu\in\mathbb{N}}$. Τώρα προφανώς η υπακολουθία της $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x^{(n_{k_\mu})})_{\mu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει και το όριο της βρίσκεται στο K_{m+1}. Άρα το K είναι συμπαγές.

Έστω τώρα K ένα τυχαίο κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Τότε υπάρχει $c>0$ τέτοιο ώστε $K\subset cK_m$. Η απεικόνιση $\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$, $x\longmapsto cx$ είναι προφανώς συνεχής, σύμφωνα με την πρόταση 1.7 το cK είναι λοιπόν συμπαγές. Αφού το K είναι κλειστό σύμφωνα με το λήμμα 1.6 είναι και συμπαγές.

Γενικεύουμε τώρα την προηγούμενη πρόταση.

1.11 Θεώρημα Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως. Αν $K\subset X$ κλειστό και φραγμένο, τότε το K είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Έστω $\{x_1,\ldots,x_m\}$ μια βάση του X. Η απεικόνιση

$$T:(\mathbb{R}^m,||.||_\infty)\longrightarrow(X,||.||)$$
$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)\longrightarrow(\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m)$$

είναι συνεχής. Πραγματικά

$$||T\lambda-T\mu|| = ||\sum_{k=1}^{m}(\lambda_k-\mu_k)x_k|| \leqslant \sum_{k=1}^{m}|\lambda_k-\mu_k|\ ||x_k|| \leqslant ||\lambda-\mu||_\infty \sum_{k=1}^{m}||x_k|| = c||\lambda-\mu||_\infty$$

όπου $c := \sum_{k=1}^{m}||x_k||$,

οπότε $(\mu \longrightarrow \lambda) \implies (T\mu \longrightarrow T\lambda)$.

Έστω $M := T^{-1}(K)$ ($:=\{\lambda\in\mathbb{R}^m : T\lambda\in K\}$). Τότε προφανώς $K=T(M)$, οπότε αν δείξουμε ότι το M είναι συμπαγές από την πρόταση 1.7 θα έχουμε και την συμπάγεια του K. Σύμφωνα με την πρόταση 1.10 αρκεί να δείξουμε ότι το M είναι κλειστό και φραγμένο.

M κλειστό: Έστω $(\lambda^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}\subset M$, $\lambda^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty} T(\lambda^{(n)}) = T(\lim_{n\to\infty} \lambda^{(n)}) = T(\lambda).$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει γιατί η T είναι συνεχής.

Λόγω $(T(\lambda^{(n)}))_{n\in\mathbb{N}}\subset K$, $T(\lambda^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(\lambda)$, και της κλειστότητας του K έπεται $T(\lambda)\in K$, συνεπώς $\lambda\in M$, άρα M κλειστό.

M φραγμένο: Έστω $\alpha := \min\{||T(\lambda)|| : \lambda\in\mathbb{R}^m\ ||\lambda||_\infty=1\}$ (την δυνατότητα να γράφουμε εδώ min αντί inf μας δίνει το γεγονός ότι η στάθμη είναι συνεχής συνάρτηση (άσκηση 1.4), η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής, και η πρόταση 1.8).
Προφανώς ισχύει $\alpha>0$, γιατί τα $x_1,\ldots,x_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Τώρα λόγω της γραμμικότητας της απεικονίσεως T έχουμε για $\lambda\neq 0$

$$||T(\lambda)|| = ||T(\frac{1}{||\lambda||_\infty}\lambda)||\ ||\lambda||_\infty \geqslant \alpha||\lambda||_\infty,$$

απ' όπου, λόγω του ότι το K είναι φραγμένο, έπεται ότι και το M είναι φραγμένο.

Ασκήσεις

1.1 i. Έστω $p \geqslant 1$. Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} , \quad \|x\|_p := \Big(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \Big)^{1/p}.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι στάθμη.

ii. Έστω $w \in C[a,b]$ μια συνάρτηση βάρους, δηλ. $\forall x \in [a,b]$ $w(x) > 0$, και $p > 1$. Δείξτε ότι η απεικόνιση $\|\cdot\|_{w,p} : C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\|f\|_{w,p} := \Big(\int_a^b w(x) |f(x)|^p dx \Big)^{1/p}$$ είναι μια στάθμη στον $C[a,b]$.

1.2 Στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την στάθμη $\|\cdot\|_\infty$ δια

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| .$$

Δείξτε ότι για $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\lim_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

1.3 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος πεπερασμένης διαστάσεως. Δείξτε ότι ο X είναι πλήρης, ότι δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy στον X συγκλίνει. (Μια ακολουθία $(x_n) \subset X$ λέγεται ακολουθία Cauchy, αν ισχύει:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n,m \geqslant N \ \|x_n - x_m\| < \varepsilon .$$

Υπόδειξη: Δείξτε κατ' αρχήν ότι κάθε ακολουθία Cauchy είναι φραγμένη.

1.4 Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας σταθμητός χώρος. Δείξτε ότι η στάθμη είναι συνεχής συνάρτηση.

1.5 Έστω X ένας γραμμικός χώρος και $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ δύο στάθμες στον X. Δείξτε ότι αν ο X είναι πεπερασμένης διαστάσεως τότε οι στάθμες $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες, δηλαδή

$$\exists\, C, c > 0 \ \forall x \in X \quad c\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant C\|x\|' .$$

Με ένα αντιπαράδειγμα δείξτε ότι σε έναν απειροδιάστατο χώρο δύο στάθμες δεν είναι υποχρεωτικά ισοδύναμες.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα 1.11 και την απόδειξή του.