2. Βέλτιστες προσεγγίσεις : Ύπαρξη - Μοναδικότητα

Αφού ορίσουμε την έννοια της βέλτιστης προσέγγισης σε σταθμητούς χώρους δίνουμε συνθήκες για την ύπαρξη και την μοναδικότητα όταν προσεγγίζουμε από υποσύνολα που περιέχονται σε υπόχωρους πεπερασμένης διαστάσεως.

2.1 Ορισμός Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος, $K\subset X$, $x\in X$. Ένα στοιχείο $x'\in K$ (αν υπάρχει) για το οποίο ισχύει

$$\forall\, y\in K \quad ||x-x'|| \leqslant ||x-y||$$

λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του x από το K.

2.2 Ορισμός Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος, $K\subset X$, $x\in X$. Το μέγεθος $d(x,K) := \inf\limits_{y\in K} ||x-y||$ λέγεται απόσταση του x από το K.

Ένα στοιχείο $x'\in K$ είναι λοιπόν βέλτιστη προσέγγιση του x από το K αν $||x-x'|| = d(x,K)$.

Υπαρξη βελτίστων προσεγγίσεων

Δείχνουμε τώρα την ύπαρξη βελτίστων προσεγγίσεων όταν το σύνολο από το οποίο προσεγγίζουμε είναι υπόχωρος πεπερασμένης διαστάσεως.

2.3 Θεώρημα (Θεμελιώδες Θεώρημα της Θεωρίας Προσεγγίσεων). Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος και K ένας υπόχωρος του X πεπερασμένης διαστάσεως. Τότε

$$\forall\, x\in X \quad \exists\, x'\in K \quad ||x-x'||= d(x,K) \qquad (= \inf_{y\in K} ||x-y||).$$

Απόδειξη

Δείχνουμε κατ' αρχήν ότι κάθε βέλτιστη προσέγγιση του x από το K βρίσκεται στο σύνολο $S:=\{y\in K:\ ||y|| \leqslant 2||x||\}$. Πραγματικά για $y\in K-S$ δηλαδή για $y\in K$ με

$$||y|| > 2||x|| \text{ έχουμε } ||x-y|| \geqslant ||y||-||x|| > 2||x||-||x|| =$$

$$= ||x|| = ||x-0|| \geqslant \inf_{z\in K} ||x-z||$$

(λόγω $0\in K$). Τώρα το σύνολο S σαν κλειστό και φραγμένο υποσύνολο γραμμικού χώρου πεπερασμένης διαστάσεως είναι κατά το θεώρημα 1.11 συμπαγές.

Εξ' άλλου η συνάρτηση $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(y):=||x-y||$, είναι συνεχής, γιατί

$|\varphi(y)-\varphi(z)| = |\ ||x-y||-||x-z||\ | \leqslant ||(x-y)+(z-x)|| = ||y-z||$, οπότε

$(\ y \longrightarrow z\ ) \Longrightarrow (\ \varphi(y) \longrightarrow \varphi(z)\ )$. Συνεπώς η φ λαμβάνει στο S το ελάχιστο της, άρα υπάρχει x' τέτοιο ώστε

$$||x-x'||= \inf_{y\in S} ||x-y||= \inf_{y\in K} ||x-y||.$$

Μια γενίκευση αυτού του αποτελέσματος δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

2.4 Θεώρημα Έστω $(X, \|.\|)$ ένας σταθμητός χώρος, $K \subset X$ κλειστό, $K \neq \emptyset$, και $K \subset X_1$ όπου X_1 υπόχωρος του X πεπερασμένης διαστάσεως. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια βέλτιστη προσέγγιση x' του x από το K.

Απόδειξη:

Η ιδέα είναι η ίδια όπως και στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος. Κάθε βέλτιστη προσέγγιση του x από το K βρίσκεται αναγκαστικά στο σύνολο $M := \{y \in X_1 : \|y - x_1\| \leqslant 2\|x - x_1\|\}$ όπου x_1 ένα τυχαίο αλλά σταθερό σημείο του K, και $M \cap K$ είναι συμπαγές. Η λεπτομερής απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Παρατηρήσεις

i. Για την ύπαρξη για κάθε $x \in X$ μιας βέλτιστης προσέγγισης από το K, η κλειστότητα του K είναι απαραίτητη προϋπόθεση. Αν K μη κλειστό τότε υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ με $x_n \longrightarrow x$, $x \in X - K$. Αλλά τότε $d(x,K) = 0$ και $\forall y \in K$ $\|x - y\| \neq 0$, δηλαδή δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από το K.

ii. Το θεώρημα 2.3 είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος 2.4. Στην πράξη το σύνολο από το οποίο προσεγγίζουμε είναι σχεδόν πάντα ένας υπόχωρος.

iii. Η υπόθεση ότι ο υπόχωρος K από τον οποίο προσεγγίζουμε είναι πεπερασμένης διαστάσεως είναι βασική στο θεώρημα 2.3 (όπως επίσης και ότι το K περιέχεται σε έναν πεπερασμένης διαστάσεως υπόχωρο στο θεώρημα 2.4). Πραγματικά έστω π.χ. ότι στον $(C[0,1/2], \|.\|_\infty)$ προσεγγίζουμε τη συνάρτηση f, $f(t) := 1/(1-t)$ από τον χώρο $\mathbf{P}$ των πολυωνύμων. Τότε $d(f, \mathbf{P}) = 0$, γιατί η ακολουθία p_n, $p_n(t) := \sum_{k=0}^{n} t^k$, συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f ($f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα προς την f), αλλά προφανώς $f \notin \mathbf{P}$, άρα $\forall p \in \mathbf{P}$ $\|f - p\|_\infty \neq 0$.

Μοναδικότητα βελτίστων προσεγγίσεων

Θα ασχοληθούμε εδώ με την περίπτωση προσεγγίσεως από υποχώρους. Κατ' αρχήν δείχνουμε ότι το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων είναι κυρτό.

2.5 Πρόταση Έστω $(X, \|.\|)$ ένας σταθμητός χώρος, X_1 υπόχωρος του X, και $x \in X$. Το σύνολο B των βέλτιστων προσεγγίσεων του x από το X_1 είναι κυρτό.

Απόδειξη

Ένα υποσύνολο K ενός γραμμικού χώρου λέγεται ως γνωστόν κυρτό, αν

$$\forall x, y \in K, \forall \lambda \in [0,1] \quad : \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in K.$$

Αν $B = \emptyset$, τότε ο ισχυρισμός προφανώς αληθεύει.
Έστω x', $x'' \in B$, δηλαδή $\|x - x'\| = \|x - x''\| = d(x, X_1)$. Για $\lambda \in [0,1]$ έχουμε τότε

$$\| x - [\lambda x' + (1-\lambda) x''] \| = \| \lambda(x - x') + (1-\lambda)(x - x'') \| \leqslant \lambda \|x - x'\| + (1-\lambda)\|x - x''\| =$$

$$= \lambda\, d(x, X_1) + (1-\lambda)\, d(x, X_1) = d(x, X_1),$$

συνεπώς $\lambda x' + (1-\lambda) x'' \in B$, άρα B κυρτό.

Σημείωση Όταν προσεγγίζουμε από υπόχωρους τότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση ή δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση, ή υπάρχει ακριβώς μια, ή υπάρχουν άπειρες.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια των αυστηρά κυρτών σταθμητών χώρων. Ακριβέστερα θα δείξουμε ότι μόνο σε τέτοιους χώρους η βέλτιστη προσέγγιση για κάθε στοιχείο του χώρου και από κάθε υπόχωρο του πεπερασμένης διαστάσεως ορίζεται μονοσήμαντα. Ας δώσουμε όμως πρώτα τον ορισμό αυτής της έννοιας.

2.6 Ορισμός Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος. Λέμε ότι η μοναδιαία σφαίρα του X (δηλαδή το σύνολο $S:=\{x\in X : ||x||\leqslant 1\}$) είναι αυστηρά κυρτή, αν ισχύει :

$$x,y\in X,\ x\neq y,\ ||x||=||y||=1 \implies ||(x+y)/2||<1.$$

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι η στάθμη $||.||$ είναι αυστηρά κυρτή, ή ακόμη ότι ο $(X,||.||)$ είναι αυστηρά κυρτός.

Μια ικανή και αναγαία συνθήκη για την αυστηρή κυρτότητα ενός σταθμητού χώρου δίνεται στο επόμενο λήμμα.

2.7 Λήμμα Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος. Τότε είναι ισοδύναμα:

i. O $(X,||.||)$ είναι αυστηρά κυρτός χώρος.

ii. $x,y\in X\ ||x+y||=||x||+||y|| \implies x,y$ γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη

ii $\implies$ i: Από τη ii έπεται αμέσως ότι για $x,y\in X$ γραμμικά ανεξάρτητα ισχύει $||x+y|| < ||x||+||y||$.
Έστω τώρα $x,y\in X$, $x\neq y$, $||x||=||y||=1$. Τότε προφανώς $x=-y$ ή x,y γραμμικά ανεξάρτητα. Πραγματικά έχουμε

$$\alpha x+\beta y=0 \Rightarrow \quad 0 = ||\alpha x+\beta y|| \geqslant |\ ||\alpha x|| - ||\beta y||\ | =$$

$$= |\ |\alpha|\ ||x|| - |\beta|\ ||y||\ | = |\ |\alpha|-|\beta|\ |$$

οπότε $\alpha(x\pm y)=0 \implies \alpha=0,\ \beta=0.$

Για $x=-y$ προφανώς $0=||(x+y)/2||<1$.
Για x,y γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε:

$$||(x+y)/2|| = 1/2||x+y|| < 1/2(||x||+||y||) = 1/2(1+1)=1.$$

Συνεπώς ισχύει η i.

i $\implies$ ii: Αρκεί να δείξουμε ότι αν η ii δεν ισχύει, δεν ισχύει ούτε η i.
Αν δεν ισχύει η ii τότε υπάρχουν $x,y\in X$ γραμμικά ανεξάρτητα τέτοια ώστε

$||x+y||=||x||+||y||$. Έστω $||x||\leqslant||y||$ και $x^*:=x/||x||$, $y^*:=y/||y||$

τότε προφανώς $||x^*||=||y^*||=1$, οπότε αν δείξουμε ότι

$||x^*+y^*||\geqslant 2$ η i δεν ισχύει. Τώρα:

$$||x^*+y^*||=||\ x/||x|| + y/||y||\ || =$$

$$= ||(x/||x|| + y/||x||) - (y/||x|| - y/||y||)||$$

$$\geqslant 1/||x||\ ||x+y|| - |\ 1/||x|| - 1/||y||\ |\ ||y|| =$$

$$= 1/||x||\ (||x||+||y||) - (1/||x|| - 1/||y||)\ ||y|| = 2.$$

Σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα μπορούμε να ορίσουμε την αυστηρή κυρτότητα ως εξής:

2.8 Ορισμός Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος. Λέμε ότι η στάθμη $||.||$ είναι αυστηρά κυρτή (η μοναδιαία σφαίρα του $(X,||.||)$ είναι αυστηρά κυρτή, ο $(X,||.||)$ είναι αυστηρά κυρτός), αν ισχύει
$x,y \in X \quad ||x+y||=||x||+||y|| \implies x,y$ γραμμικά εξαρτημένα.

Δείχνουμε τώρα την μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης σε αυστηρά κυρτούς χώρους.

2.9 Θεώρημα Έστω $(X,||.||)$ ένας αυστηρά κυρτός σταθμητός χώρος. Αν X_1 είναι ένας υπόχωρος του X, τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει το πολύ μια βέλτιστη προσέγγιση του x από τον X_1.

Απόδειξη

Για $x \in X_1$ η μοναδική βέλτιστη προσέγγιση του x από τον X_1 είναι προφανώς το ίδιο το x. Έστω λοιπόν $x \notin X_1$ και $x', x'' \in X_1$ βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον X_1, δηλαδή

$$||x-x'||=||x-x''||=d(x,X_1). \quad \text{Τότε έχουμε}$$

$$||x-(x'+x'')/2|| = ||(x-x')/2 + (x-x'')/2|| \leqslant 1/2\ \{||x-x'||+||x-x''||\} = d(x,X_1),$$

άρα

$$||(x-x')+(x-x'')|| = 2\ d(x,X_1) = ||x-x'|| + ||x-x''||.$$

Συνεπώς $x-x'=\lambda(x-x'')$, δηλαδή $(1-\lambda)x = x'-\lambda x''$, οπότε αναγκαστικά $\lambda=1$, άρα $x'=x''$.

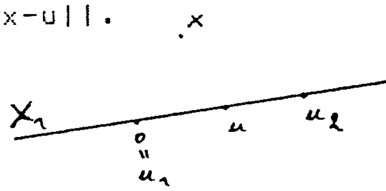
Δείχνουμε τώρα και το αντίστροφο του ανωτέρω θεωρήματος.

2.10 Θεώρημα Έστω $(X,||.||)$ ένας μη αυστηρά κυρτός χώρος. Τότε υπάρχει ένας υπόχωρος X_1 του X και ένα $x \in X$, τέτοια ώστε να υπάρχουν δύο (συνεπώς άπειρες) βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον X.

Απόδειξη

Αφού ο $(X,||.||)$ δεν είναι αυστηρά κυρτός υπάρχουν σύμφωνα με τον ορισμό 2.6 δύο στοιχεία $y,z \in X$, $y \neq z$ με $||y||=||z||=||(y+z)/2||=1$. Θέτουμε τώρα $X_1:=\text{span}(y-z)$ ($:=\{\alpha(y-z) : \alpha \in \mathbb{R}\}$), και $x:=-z$ και θα δείξουμε ότι 0 και $y-z$ είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον X_1.

Με $u_1:=0$, $u_2:=y-z$, $u:=(y-z)/2$ έχουμε $||x-u_1||=||x-u_2||=||x-u||$.



Πράγματι: $||x-u_1|| = ||x|| = ||-z|| = ||z|| = 1,$

$$||x-u_2|| = ||-z-(y-z)|| = ||-y|| = ||y|| = 1,$$

$$||x-u|| = ||-z-(y-z)/2|| = ||-(y+z)/2||=||y+z||/2 = 1.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει $\upsilon \in X_1$ τέτοιο ώστε $||x-\upsilon|| < ||x-u||$. Επειδή

$$\upsilon \in X_1 \setminus \{u_1,u_2,u\}\ \exists k \in \{1,2\}\ \exists \lambda \in (0,1) \quad u=\lambda u_k+(1-\lambda)\upsilon$$

(διότι $\upsilon \in X_1 \implies \upsilon=ku_2$. Αν $k>1/2$ το u γράφεται σαν κυρτός συνδιασμός των u_1 και υ, αν $k<1/2$ το u γράφεται σαν κυρτός συνδιασμός των u_2 και υ) έχουμε:

$$||x-u|| = ||\lambda(x-u_k)+(1-\lambda)(x-\upsilon)|| \leqslant \lambda||x-u_k|| + (1-\lambda)||x-\upsilon||$$

$$< \lambda||x-u|| + (1-\lambda)||x-u|| = ||x-u||, \text{άτοπο.}$$

Συνεπώς u_1 και u_2 είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον X_1.

Παρατήρηση Το πρόβλημα της προσεγγίσεως από έναν υπόχωρο λύνεται σε έναν αυστηρά κυρτό σταθμητό χώρο μονοσήμαντα (υπάρχει δηλαδή για κάθε x το πολύ μια βέλτιστη προσέγγιση από έναν υπόχωρο). Υπάρχουν όμως και σε μη αυστηρά κυρτούς χώρους υπόχωροι για τους οποίους το εν λόγω πρόβλημα λύνεται επίσης μονοσήμαντα (ότι αυτό δεν μπορεί να συμβεί για κάθε υπόχωρο είδαμε ήδη στο θεώρημα 2.10). Τέτοια παραδείγματα θα δούμε στην τέταρτη παράγραφο αυτού του μαθήματος.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα αυστηρά κυρτών και μη αυστηρά κυρτών σταθμητών χώρων.

Παραδείγματα αυστηρά κυρτών σταθμητών χώρων.

Έστω $p\in(1,+\infty)$. Οι σταθμητοί χώροι

i. $(C[a,b],||\cdot||_p)$, ii. $(C[a,b],||\cdot||_{w,p})$ και iii. $(\mathbb{R}^n,||\cdot||_p)$

είναι αυστηρά κυρτοί. Για τον $(C[a,b],||\cdot||_p)$, η απόδειξη δόθηκε ήδη όταν αποδείξαμε την ανισότητα του Minkowski. Στις άλλες δυο περιπτώσεις η απόδειξη είναι ανάλογη.

Παραδείγματα μη αυστηρά κυρτών σταθμητών χώρων

Οι σταθμητοί χώροι $(C[a,b],||\cdot||_1)$, $(C[a,b],||\cdot||_\infty)$, $(\mathbb{R}^n,||\cdot||_\infty)$, $(\mathbb{R}^n,||\cdot||_1)$ δεν είναι αυστηρά κυρτοί.

Δίνουμε την απόδειξη μόνο για τους χώρους $(C[0,1],||\cdot||_1)$, $(C[0,1],||\cdot||_\infty)$, ανάλογες είναι οι αποδείξεις στις δύο άλλες περιπτώσεις.

i. $(C[0,1],||\cdot||_\infty)$. Έστω $f(x):=x$, $\varphi(x):=x^2$. Οι f,φ είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητες και έχουμε:

$$||f+\varphi||_\infty = \max_{0\le x\le 1}|x+x^2| = 2\ ,\ ||f||_\infty+||\varphi||_\infty = 1+1 = 2,\ \text{συνεπώς}$$

$$||f+\varphi||_\infty = ||f||_\infty+||\varphi||_\infty .$$

ii. $(C[0,1],||\cdot||_1)$. Έστω πάλι $f(x):=x$, $\varphi(x):=x^2$. Τότε

$$||f+\varphi||_1 = \int_0^1(x+x^2)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_0^1 x^2dx = ||f||_1+||\varphi||_1 .$$

Ασκήσεις

2.1 Στον $(\mathbb{R}^3, ||.||_\infty)$ προσδιορίστε όλες τις βέλτιστες προσεγγίσεις του $x:=(1,2,3)$ από τον $X_1 := \{ (\alpha_1, \alpha_2, 0) : \alpha_1, \alpha_2\ \mathbb{R} \}$.
Πώς εξηγείται το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές βέλτιστες προσεγγίσεις;

2.2 Έστω $(X,||.||)$ ένας σταθμητός χώρος, K ένα μη κενό κλειστό υποσύνολο του X με $K \subset X_1$ όπου X_1 υπόχωρος του X πεπερασμένης διαστάσεως.
Δείξτε ότι για κάθε $x \in X$ υπάρχει μια βέλτιστη προσέγγιση x' του x από το K.

2.3 Έστω $q_k : [1,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $q_k(x):=x^k$, $k=1,3$. Προσδιορίστε τις βέλτιστες προσεγγίσεις του q_3 από τον $X := \mathrm{span}(q_1)$ ως προς τις στάθμες $||.||_\infty$ και $||.||_1$ του $C[1,2]$.