3.8 Έστω $(X,(\cdot,\cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x_1,\ldots,x_k \in X$. Δείξτε ότι αν $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant k$ και x_n, x_m οι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον X_n, X_m αντίστοιχα τότε $\|x_n\| \leqslant \|x_m\|$. Θέσαμε εδώ

$$X_\ell := \mathrm{span}(x_1,\ldots,x_\ell),\ 1 \leqslant l \leqslant k .$$

3.9 Έστω $f \in C[a,b]$. Δείξτε ότι $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

3. Βέλτιστες προσεγγίσεις σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο: Κανονικές Εξισώσεις – Ορθογώνια πολυώνυμα – Αναπτύγματα Fourier

Αν $(X,||.||)$ είναι ένας σταθμητός χώρος, X_1 υπόχωρος του X πεπερασμένης διαστάσεως και $x\in X$, τότε όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο υπάρχει τουλάχιστον μια βέλτιστη προσέγγιση x' του x από τον X_1. Αν μάλιστα ο $(X,||.||)$ είναι αυστηρά κυρτός τότε το x' ορίζεται μονοσήμαντα. Φυσικά μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός της βέλτιστης προσέγγισης. Το πρόβλημα αυτό είναι γενικά πολύ δύσκολο. Στην περίπτωση όμως που η στάθμη παράγεται από ένα εσωτερικό γινόμενο το εν λόγω πρόβλημα ανάγεται στη λύση ενός γραμμικού συστήματος.

3.1 Ορισμός Έστω X ένας (πραγματικός) γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση

$$(.,.) : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

λέγεται εσωτερικό γινόμενο στον X, αν ισχύουν:

ΕΓ1	$\forall x,y,z\in X$	$(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$
ΕΓ2	$\forall x,y\in X\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$	$(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$
ΕΓ3	$\forall x,y\in X$	$(x,y)=(y,x)$
ΕΓ4	$\forall x\in X-\{0\}$	$(x,x) > 0.$

Ένας γραμμικός χώρος στον οποίο έχει ορισθεί ένα εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν για $x,y\in X$ ισχύει $(x,y)=0$ λέμε ότι τα x,y είναι ορθογώνια, συμβολισμός $x\perp y$.

Σε έναν χώρο $(X,(.,.))$ με εσωτερικό γινόμενο δια $||x||:=\sqrt{(x,x)}$, $x\in X$, ορίζεται μια στάθμη. Για να το δείξουμε αυτό χρειαζόμαστε την ανισότητα του Schwarz.

3.2 Λήμμα (Ανισότητα του Schwarz)
Σε έναν χώρο $(X,(.,.))$ με εσωτερικό γινόμενο ισχύει η ανισότητα του Schwarz (ή ανισότητα των Cauchy-Schwarz-Bunjakowski)

$$\forall x,y\in X \quad |(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Αν σ' αυτή την ανισότητα ισχύει ισότητα, τότε τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη

Λόγω ΕΓ4 έχουμε $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ $(x-\lambda y\ ,\ x-\lambda y)\geqslant 0$, δηλαδή

$$\forall\lambda\in\mathbb{R} \quad (y,y)\lambda^2 - 2(x,y)\lambda + (x,x) \geqslant 0\ ,$$

γεγονός που σημαίνει ότι για την διακρίνουσα Δ ισχύει

$$\Delta = 4[(x,y)^2 - (x,x)(y,y)] \leqslant 0,$$

οπότε λόγω της μονοτονίας της συναρτήσεως f, $f(t):=\sqrt{t}$, έχουμε

$$|(x,y)| \leqslant \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Αν στην ανισότητα του Schwarz ισχύει ισότητα, τότε $\Delta=0$, οπότε υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $(x-\lambda y\ ,\ x-\lambda y)=0$, δηλαδή $x-\lambda y=0$, συνεπώς x,y γραμμικά εξαρτημένα.

3.3 Πρόταση Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε δια

$$||x||:=\sqrt{(x,x)},\quad x\in X,$$

ορίζεται μια στάθμη στον X (η στάθμη παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο), η οποία μάλιστα είναι αυστηρά κυρτή.

Απόδειξη

Οι Σ1, Σ2 ισχύουν προφανώς γιατί

$$x\in X,\quad ||x||=0 \iff (x,x)=0 \iff x=0$$

(όπου η τελευταία συνεπαγωγή ισχύει λόγω του ΕΓ4), και

$$\lambda\in\mathbb{R},\ x\in X \quad ||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x,\lambda x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda|\ ||x||.$$

Έστω τώρα $x,y\in X$. Τότε με την ανισότητα του Schwarz έχουμε

$$||x+y||^2 = (x+y,x+y) = (x,x)+2(x,y)+(y,y) = ||x||^2 + 2(x,y) + ||y||^2$$
$$\leqslant ||x||^2 + 2||x||\ ||y|| + ||y||^2 = (||x||+||y||)^2,$$

συνεπώς $||x+y|| \leqslant ||x||+||y||$, άρα ισχύει και η Σ3.
Αν στην τριγωνική ανισότητα ισχύει ισότητα, τότε αναγκαστικά $|(x,y)|=||x||\ ||y||$, οπότε σύμφωνα με το λήμμα 3.2 τα x,y είναι γραμμικά εξαρτημένα. Συνεπώς η στάθμη είναι αυστηρά κυρτή.

Παραδείγματα

Στον $C[a,b]$ δια

$$(.,.) : C[a,b]\times C[a,b] \longrightarrow R$$
$$(f,g) \longmapsto \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

ορίζεται προφανώς ένα εσωτερικό γινόμενο.

Αν w είναι μια συνάρτηση βάρους, τότε δια $(f,g):=\int_a^b w(x)f(x)g(x)\ dx$ ορίζεται επίσης ένα εσωτερικό γινόμενο.

Στον $\mathbb{R}^n$, δια $(x,y):=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ ορίζεται ένα εσωτερικό γινόμενο.

Η ανισότητα του Schwarz στους προαναφερθέντες χώρους είναι ειδική περίπτωση της ανισότητας του Hölder (με $p=q=1/2$).

Έστω λοιπόν $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x\in X$ και X_1 ένας υπόχωρος του X πεπερασμένης διαστάσεως. Όταν μιλάμε για βέλτιστες προσεγγίσεις σε χώρους με εσωτερικό γινόμενο εννοούμε πάντα βέλτιστες προσεγγίσεις ως προς την από το εσωτερικό γινόμενο παραγόμενη στάθμη. Τώρα αφού η στάθμη είναι αυστηρά κυρτή, υπάρχει για $x\in X$, ακριβώς μια βέλτιστη προσέγγιση του x από τον X_1. Στο επόμενο θεώρημα δίνουμε έναν χαρακτηρισμό της βέλτιστης προσέγγισης που αποτελεί το θεμέλιο των σχετικών υπολογιστικών μεθόδων.

3.4 Θεώρημα (Χαρακτηρισμός της βέλτιστης προσεγγίσεως)

Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, Y ένας υπόχωρος του X και $x\in X$. Ένα στοιχείο $x^*\in Y$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y τότε και μόνο τότε αν ισχύει

(3.5) $$\forall\, y\in Y \quad (x,y)=(x^*,y)$$

$$(\text{ή } \forall\, y\in Y\ (x-x^*,y)=0 \quad \text{ή} \quad x-x^*\perp y\ ).$$

Απόδειξη

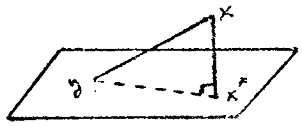
Έστω ότι ισχύει η (3.5). Τότε για $y\in Y$ έχουμε $\|x-x^*\|\leqslant\|x-y\|$. Πραγματικά εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα (δες άσκηση 3.1)

$$(u,v)=0 \implies \|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$$

έχουμε ακριβώς όπως και στην Ευκλείδειο Γεωμετρία

$$\|x-y\|^2=\|(x-x^*)+(x^*-y)\|^2=\|x-x^*\|^2+\|x^*-y\|^2\geqslant\|x-x^*\|^2,$$

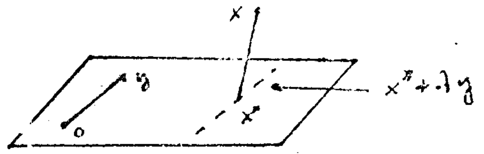
όπου $(x^*-y)\in Y$ και $\|x^*-y\|\geqslant 0.$



Έστω τώρα x^* η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y. Έστω ότι υπάρχει $y\in Y$ τέτοιο ώστε $(x-x^*,y)\neq 0$ (οπότε φυσικά $y\neq 0$).
Τώρα ορίζοντας την συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ δια $\varphi(\lambda):=\|x-(x^*+\lambda y)\|^2$ έχουμε $\varphi(\lambda)=(x-x^*-\lambda y,\ x-x^*-\lambda y)=\|y\|^2\lambda^2-2(x-x^*,y)\lambda+\|x-x^*\|^2$, οπότε

$$\min_{\lambda\in\mathbb{R}}\varphi(\lambda)=\varphi((x-x^*,y)/\|y\|^2)<\varphi(0)=\|x-x^*\|^2,$$ άτοπο, διότι x είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y.

Γεωμετρικά αυτό σημαίνει:



Το $x-x^*$ δεν είναι κάθετο στο y, άρα η κάθετος από το x στην $x^*+\lambda y$ η οποία είναι παράλληλος προς το y δεν είναι η xx^*.

Κανονικές Εξισώσεις

Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, X_1 υπόχωρος του X πεπερασμένης διαστάσεως, έστω $\dim X=n$, και $x\in X$. Έστω τώρα $\{x_1,\dots,x_n\}$ μια βάση του X_1. $x^*\in X_1$ είναι σύμφωνα με την (3.5) ακριβώς τότε η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον X_1, αν ισχύει

(*) $$\forall\, y\in X_1 \quad (x^*,y)=(x,y),$$

το οποίο είναι προφανώς ισοδύναμο με

(3.6) $$(x^*,x_k)=(x,x_k)\ ,\quad k=1,\dots,n.$$

Λόγω του ότι $x^*\in X_1$ και $\{x_1,\dots,x_n\}$ βάση του X_1, το x^* μπορεί να παρασταθεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$x^*=\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n\ ;\quad \alpha_1,\dots,\alpha_n\ \mathbb{R}.$$

Αντικαθιστώντας τώρα αυτή την έκφραση στην (3.6) παίρνουμε τις κανονικές εξισώσεις

$$
(3.7)\quad \begin{cases}
(x_1,x_1)\alpha_1+(x_1,x_2)\alpha_2+\dots+(x_1,x_n)\alpha_n=(x,x_1)\\
(x_2,x_1)\alpha_1+(x_2,x_2)\alpha_2+\dots+(x_2,x_n)\alpha_n=(x,x_2)\\
\vdots\\
(x_n,x_1)\alpha_1+(x_n,x_2)\alpha_2+\dots+(x_n,x_n)\alpha_n=(x,x_n)
\end{cases}
$$

δηλαδή ένα $n\times n$ γραμμικό σύστημα για τους n αγνώστους $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι το σύστημα (3.7) έχει ακριβώς μια λύση και αυτό θα ήταν μια άλλη απόδειξη για ύπαρξη και μοναδικότητα του x^*. Εμείς όμως ήδη ξέρουμε ότι το x^* υπάρχει και ορίζεται μονοσήμαντα, συμπεραίνουμε λοιπόν ότι και το σύστημα (3.7) λύνεται μονοσήμαντα. Για να προσδιορίσουμε λοιπόν το x^* δεν έχουμε παρά να λύσουμε το σύστημα (3.7). Ο πίνακας του συστήματος (3.7) $G:=G(x_1,\dots,x_n):=((x_k,x_\nu))$ είναι γνωστός σαν πίνακας του Gram για τα στοιχεία $x_1,\dots,x_n$, η αντίστοιχη ορίζουσα $\det G$ λέγεται ορίζουσα του Gram. ~~Λόγω $(x_k,x_\nu)=(x_\nu,x_k)$ ο πίνακας του Gram είναι προφανώς συμμετρικός.~~ Επιπλέον ο πίνακας G είναι θετικά ορισμένος, δηλαδή με

$$(a,b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\ ,\quad a,b\in\mathbb{R}^n,\ \text{έχουμε}\quad \forall\, a\in\mathbb{R}^n-\{0\}\quad (a,Ga)>0.$$

Πράγματι:

$$(a,Ga)=\sum_{k=1}^{n}a_k(Ga)_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\Big(\sum_{\ell=1}^{n}(x_k,x_\ell)a_\ell\Big)=\sum_{k=1}^{n}a_k\Big(x_k,\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell x_\ell\Big)=$$
$$=\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kx_k,\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell x_\ell\Big)=\Big\|\sum_{k=1}^{n}a_kx_k\Big\|^2,$$

οπότε λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1,\dots,x_n$ για $a\neq 0$ ισχύει $(a,Ga)>0$. Από αυτή τη σχέση έπεται ακόμη μια φορά ότι ο G είναι αντιστρέψιμος. Αφού ο G είναι θετικά ορισμένος το σύστημα (3.7) μπορεί για παράδειγμα να λυθεί με ανάλυση Cholesky. Μερικές φορές όμως παρουσιάζονται δυσκολίες στην αριθμητική λύση του συστήματος (3.7). Αν για παράδειγμα $X:=C[0,1]$,

$$(f,g):=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\ ,\ X_1:=\mathbb{P}_{n-1}\ \text{και}\ x_k(t):=t^{k-1}\ ,\ k=1,\dots,n,$$

τότε ο αντίστοιχος πίνακας του Gram είναι ο πίνακας $G=(g_{k\nu})$, $g_{k\nu}:=1/(k+\nu-1)$, γνωστός σαν πίνακας του Hilbert ο οποίος και για μικρό ακόμη n έχει πολύ μεγάλο δείκτη κατάστασης, πράγμα που σημαίνει ότι μικρά λάθη στις πράξεις μπορούν να μεταβάλουν πάρα πολύ την λύση. Υπάρχει όμως για κάθε υπόχωρο X_1 η δυνατότητα της επιλογής καταλλήλου βάσεως ώστε το σύστημα (3.7) να πάρει την απλούστατη δυνατή μορφή, τέτοια δηλαδή μορφή που ο πίνακας του Gram να είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_n.

Ορθοκανονικοποίηση

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να επιλέξουμε μία βάση του χώρου από τον οποίο προσεγγίζουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε ο πίνακας του Gram να είναι ο μοναδιαίος πίνακας.

3.8 Ορισμός Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα σύνολο $S=\{x_1,\dots,x_n\}\subset X$ λέγεται ορθογώνιο (ON) (ορθογώνιο σύστημα) αν ισχύει $(x_k,x_\nu)=0$, $k\neq\nu$, $k,\nu\in\{1,\dots,n\}$. Αν επιπλέον κάθε διάνυσμα του S είναι μοναδιαίο, αν ισχύει δηλαδή $\|x_k\|=1$, $k=1,\dots,n$; τότε το S λέγεται ορθοκανονικό (ΟΚΝ) (ορθοκανονικό σύστημα). Σ' αυτή την περίπτωση ισχύει δηλαδή $(x_k,x_\nu)=\delta_{k\nu}$, $k,\nu\in\{1,\dots,n\}$. Αν ένα ορθοκανονικό σύστημα S, είναι βάση του X, τότε το S λέγεται ορθοκανονική βάση (ΟΚΝΒ) του X.

3.9 Πρόταση Έστω $(X,(\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο του X. Τότε τα $e_1,\dots,e_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Απόδειξη

Έστω $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ και $\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n=0$. Τότε για $k\in\{1,\dots,n\}$ ισχύει

$$0=(0,e_k)=(\lambda_1 e_1+\dots+\lambda_n e_n,e_k)=\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu (e_\nu,e_k)=\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \delta_{k\nu}=\lambda_k .$$

Θα δούμε τώρα ένα θεώρημα το οποίο μας επιτρέπει ξεκινώντας από μια βάση ενός χώρου πεπερασμένης διαστάσεως να σχηματίσουμε μια ορθοκανονική βάση.

3.10 Θεώρημα (Ορθοκανονικοποίηση κατά Gram-Schmidt).

Έστω $(X,(\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν $x_1,\dots,x_n \in X$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, τότε υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα $\{e_1,\dots,e_n\}$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\mathrm{span}(x_1,\dots,x_n)=\mathrm{span}(e_1,\dots,e_n)$$

(όπου $\mathrm{span}(y_1,\dots,y_k):=\{y\in X:\ y=\lambda_1 y_1+\dots+\lambda_k y_k,\ \lambda_1,\dots\lambda_k\in\mathbb{R}\}$).

Απόδειξη

Επειδή $x_1,\dots,x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ισχύει $x_k\neq 0$ (άρα και $\|x_k\|\neq 0$) $k=1,\dots,n$. Ορίζουμε τώρα το σύνολο $\{e_1',\dots,e_n'\}$ δια

$e_1' := x_1$

$e_2' := x_2 - ((x_2,e_1')/\|e_1'\|^2)e_1'$

$[\ e_2' = x_2+\alpha e_1',\ (e_2',e_1') = 0 \implies (x_2,e_1') + \alpha(e_1',e_1') = 0$

$\implies \alpha = -(x_2,e_1')/\|e_1'\|^2\ ]$

$e_3' := x_3-((x_3,e_2')/\|e_2'\|^2)e_2' -((x_3,e_1')/\|e_1'\|^2)e_1'$

$[\ e_3' = x_3 + \alpha e_2' + \beta e_1',\ e_3' \perp e_2',e_1'\ ]$

.
.
.

$e_n' := x_n-((x_n,e_{n-1}')/\|e_{n-1}'\|^2)e_{n-1}' - \dots -((x_n,e_1')/\|e_1'\|^2)e_1'$

$[e_n' \perp e_1',e_2',\dots,e_{n-1}',\ e_n' = x_n+\dots]$.

Λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $x_1,\dots x_k$, $k\leq n$, άρα και των $e_1',e_2',\dots,e_k'$ και x_k ισχύει προφανώς $e_k'\neq 0$, συνεπώς το e_{k+1}' είναι καλώς ορισμένο.
Το σύνολο $\{e_1',\dots,e_n'\}$ είναι ορθογώνιο. Αν και αυτό φαίνεται από τον ορισμό των e_k', εντούτοις το αποδεικνύουμε. Δείχνουμε λοιπόν επαγωγικά ως προς k ότι το σύνολο $\{e_1',\dots,e_k'\}$ είναι ορθογώνιο.

$k=2$: $(e_2',e_1')=(x_2,e_1')-((x_2,e_1')/\|e_1'\|^2)(e_1',e_1')=(x_2,e_1')-(x_2,e_1')=0$

$k-1 \longrightarrow k$: Αρκεί να δείξουμε ότι $(e_k',e_\nu')=0$, $\nu=1,\dots,k-1$. Λόγω

$e_k' = x_k - \sum_{\mu=1}^{k-1} ((x_k,e_\mu')/\|e_\mu'\|^2)e_\mu'$ έχουμε

$(e_k',e_\nu')=(x_k,e_\nu')-\sum_{\mu=1}^{k-1} ((x_k,e_\mu')/\|e_\mu'\|^2)(e_\mu',e_\nu')=(x_k,e_\nu')-(x_k,e_\nu')=0,$

όπου έγινε χρήση του ότι κατά την υπόθεση της επαγωγής ισχύει

$(e'_\mu, e'_\nu)=\delta_{\mu\nu}$, $\mu,\nu=1,\dots,k-1$.

Θέτουμε τώρα $e_k := (1/\|e'_k\|)e'_k$ οπότε παίρνουμε το ορθοκανονικό σύστημα $\{e_1,\dots,e_n\}$. Τώρα λόγω $span(e_1,\dots,e_n) < span(x_1,\dots,x_n)$ και της γραμμικής ανεξαρτησίας των $e_1,\dots,e_n$ (πρόταση 3.9) ισχύει

$$span(e_1,\dots,e_n) = span(x_1,\dots,x_n).$$

Σημειώσεις

i. Η απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος είναι κατασκευαστική. Δεν αποδείχθηκε δηλαδή απλώς η ύπαρξη των $e_1,\dots,e_n$ αλλά δόθηκε και μια μέθοδος προσδιορισμού των.

ii. Τα $e_1,\dots,e_n$ εξαρτώνται και από τη σειρά της ορθοκανονικοποιήσεως των $x_1,\dots,x_n$!

Άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι το εξής πόρισμα.

3.11 Πόρισμα Σε κάθε χώρο X πεπερασμένης διαστάσεως, $X\neq\{0\}$, με εσωτερικό γινόμενο υπάρχει μια ορθοκανονική βάση.

Έστω τώρα $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, X_1 ένας υπόχωρος του X με $\dim X_1 = n$, $x\in X$. Αν $\{e_1,\dots,e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του X_1 και $x^*\in X_1$ η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον X_1, $x^*=\alpha_1 e_1+\dots+\alpha_n e_n$, τότε το σύστημα των κανονικών εξισώσεων (3.7) για αυτή την βάση γράφεται

$$\alpha_k=(x,e_k),\ k=1,\dots,n,$$

συνεπώς για την βέλτιστη προσέγγιση x^* έχουμε

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} (x,e_k)\, e_k. \qquad (3.12)$$

Χρησιμοποιώντας μια βάση του X_1 $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ η οποία είναι ορθογώνια αλλά όχι αναγκαστικά ορθοκανονική και θέτοντας $x^* = \beta_1 e'_1+\dots+\beta_n e'_n$ το σύστημα των κανονικών εξισώσεων γράφεται

$$\beta_k = (x,e'_k)/(e'_k,e'_k) \quad (=(x,e'_k)/\|e'_k\|^2;\ k=1,\dots,n)$$

οπότε για τη βέλτιστη προσέγγιση x^* του x έχουμε

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} ((x,e'_k)/\|e'_k\|^2)e'_k. \qquad (3.13)$$

Ορθογώνια Πολυώνυμα

Έστω ο χώρος C[a,b] με το εσωτερικό γινόμενο $(.,.)_w$, όπου $(f,g)_w := \int_a^b w(x)f(x)g(x)\,dx$, w μια συνάρτηση βάρους. Συχνά στις εφαρμογές προσεγγίζουμε συνεχείς συναρτήσεις με πολυώνυμα βαθμού το πολύ n. Ο χώρος από τον οποίο προσεγγίζουμε είναι δηλαδή ο $\mathbb{P}_n$. Μας ενδιαφέρει ο προσδιορισμός μιας ορθογώνιας βάσεως $\{p_0,\dots,p_n\}$ του $\mathbb{P}_n$ ($\dim P = n+1$), γιατί τότε για $f\in C[a,b]$ έχουμε για την βέλτιστη προσέγγιση p του f από τον $\mathbb{P}_n$

$$p = \sum_{k=0}^{n} ((f,p_k)_w/(p_k,p_k)_w)\ p_k$$

Σύμφωνα με την (3.13) φυσικά αυτό μπορεί να γίνει ξεκινώντας από μια βάση του $\mathbb{P}_n$ και ορθοκανονικοποιώντας κατά Gram-Schmidt. Θα δούμε αμέσως τώρα ότι αν ξεκινήσουμε από την βάση $\{q_0,\dots,q_n\}$, $q_k(x):=x^k$, και ορθοκανονικοποιήσουμε με τη σειρά $q_0,\dots,q_n$, η όλη διαδικασία απλουστεύεται πάρα πολύ.

3.14 Θεώρημα Έστω w μια συνάρτηση βάρους, και στον C[a,b] έστω το εσωτερικό γινόμενο $(.,.)_w$, $(f,\varphi)_w := \int_a^b w(x)f(x)\varphi(x)dx$.

Τότε υπάρχουν μονοσήμαντα ορισμένα πολυώνυμα $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, όπου $\hat{\mathbb{P}}_n := \{p\in\mathbb{P} : p(x) = x^n + q(x),\ q\in\mathbb{P}_{n-1}\}$, τα οποία είναι ορθογώνια ως προς $(.,.)_w$, δηλαδή

~~(3.15) $(p_n, p_m)_w = 0$, $n\neq m$ ή ισοδύναμα~~

(3.15΄) $$(p_n, p_m)_w = 0\ ,\ m<n.$$

Επιπλέον για αυτά τα πολυώνυμα ισχύει ο αναδρομικός τύπος

(3.16) $$\begin{cases} p_0(x)=1 \\ p_{n+1}(x)=(x-\alpha_{n+1})\ p_n(x) - \beta_{n+1}p_{n-1}(x)\ , & n\geq 0 \end{cases}$$

όπου θέσαμε $p_{-1}(x):=0$ και

$$\alpha_{n+1} := (\hat{x}\ p_n, p_n)_w/(p_n, p_n)_w\ ,\quad n\geq 0$$

(3.17) $$\beta_{n+1} := \begin{cases} 0 & ,\ n=0 \\ (p_n,p_n)_w/(p_{n-1},p_{n-1})_w & ,\ n\geq 1. \end{cases}$$

(Με $\hat{x}$ συμβολίζουμε εδώ τη συνάρτηση $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x$).

Τα πολυώνυμα p_n, $n\in\mathbb{N}_0$ λέγονται λόγω της (3.15) ορθογώνια πολυώνυμα ως προς τη συνάρτηση βάρους w.

Απόδειξη

Μονοσήμαντο: Τα πολυώνυμα $p_0,\dots,p_n$, είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα, συνεπώς $\mathbb{P}_n = \mathrm{span}(p_0,\dots,p_n)$. Επομένως λόγω της γραμμικότητας του εσωτερικού γινομένου ως προς το δεύτερο στοιχείο (το οποίο είναι άμεση συνέπεια των ΕΓ1, ΕΓ2, ΕΓ3) από την (3.15΄) έχουμε

(*) $$\forall\ p\in\mathbb{P}_n\quad (p_{n+1}, p)_w = 0\ .$$

Έστω τώρα πολυώνυμα $r_n\in\hat{\mathbb{P}}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, για τα οποία ισχύει (δες την (3.15))

$$(r_n, r_m)_w = 0\ ,\ n\neq m.$$

Τότε σύμφωνα με την (*) θα ισχύει προφανώς και

(**) $$\forall\ p\in\mathbb{P}_n\quad (r_{n+1}, p)_w = 0\ .$$

Από τις (*), (**) έπεται

$$\forall\ p \in \mathbb{P}_n \quad (p_{n+1} - r_{n+1},\ p)_w = 0,$$

οπότε με $p := p_{n+1} - r_{n+1} \in \mathbb{P}_n$ έχουμε

$$(p_{n+1} - r_{n+1},\ p_{n+1} - r_{n+1}) = 0,$$

επομένως κατά το ΕΓ4 $p_{n+1} = r_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ύπαρξη: Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά. Θέτουμε $p_0(x) := 1$, και υποθέτουμε ότι δείξαμε την ύπαρξη των πολυωνύμων $p_0, \dots, p_n$. Αν υπάρχει το πολυώνυμο p_{n+1}, τότε θα ισχύει προφανώς $p_{n+1} - \hat{x}p_n \in \mathbb{P}_n$, συνεπώς

$$p_{n+1} - \hat{x}p_n = \sum_{k=0}^{n} c_k p_k, \quad \text{δηλαδή}$$

(***) $$p_{n+1} = (\hat{x} + c_n)p_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k p_k.$$

Τώρα η σχέση (3.15′) ισχύει ακριβώς τότε, αν

i. $$0 = (p_{n+1}, p_n)_w = (\hat{x}p_n, p_n)_w + c_n(p_n, p_n)_w + \sum_{k=0}^{n-1} c_k (p_k, p_n)_w$$

και

ii. για $m = 0, \dots, n-1$ $$0 = (p_{n+1}, p_m)_w = (\hat{x}p_n, p_m)_w + \sum_{k=0}^{n} c_k (p_k, p_m)_w = $$
$$= (p_n, \hat{x}p_m)_w + c_m (p_m, p_m)_w$$

δηλαδή για

(+) $$\begin{cases} c_n = -(\hat{x}p_n, p_n)_w / (p_n, p_n)_w, \quad c_{n-1} = -(p_n, \hat{x}p_{n-1})_w / (p_{n-1}, p_{n-1})_w, \quad c_m = 0, \\ \text{όπου } m = 0, \dots, n-2. \end{cases}$$

Τώρα λόγω $(p_n, p_n)_w = (p_n, \hat{x}p_{n-1})_w$ $[\Longleftrightarrow (p_n, \overbrace{p_n - \hat{x}p_{n-1}}^{\in \mathbb{P}_{n-1}}) = 0]$ οι σχέσεις (+) και (***) μας δίνουν τον αναδρομικό τύπο (3.16) με $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ όπως ορίζονται στη σχέση (3.17). Αυτό δείχνει φυσικά και την ύπαρξη του p_{n+1}.

Παρατήρηση: Έστω w μια άρτια συνάρτηση βάρους και $(.,.)_w$ το εσωτερικό γινόμενο στον $C[-a,a]$. Σ' αυτή την περίπτωση τα ως προς $(.,.)_w$ ορθογώνια πολυώνυμα $p_n \in \mathbb{P}_n$ είναι άρτια ή περιττά αν ο n είναι άρτιος ή περιττός αντίστοιχα. Επιπλέον ο αναδρομικός τύπος (3.16) απλουστεύεται κάπως και παίρνει την μορφή

(3.18) $$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_{n+1}(x) = x p_n(x) - \beta_{n+1} p_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \end{cases}$$

όπου όπως και στην (3.16) θέσαμε $p_{-1}(x) := 0$ και

$$\beta_{n+1} := \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (p_n, p_n)_w / (p_{n-1}, p_{n-1})_w, & n \geq 1. \end{cases}$$

Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά. Κατ' αρχήν $p_0(x) = 1$ και $p_1(x) = x$, διότι $\alpha_1 = 0$

λόγω $(\hat{x}p_0, p_0)_w = \int_{-a}^{a} w(x)x\,dx = 0$, όπου η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί η συνάρτηση $\hat{x}w$ είναι περιττή. Έστω τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει για $n=0,\ldots,m$, δηλαδή ο τύπος (3.18) ισχύει για $n=0,\ldots,m$ και τα $p_0,\ldots,p_m$ είναι περιττές ή άρτιες συναρτήσεις ανάλογα με το αν οι δείκτες τους είναι περιττοί ή άρτιοι αριθμοί. Τότε $\alpha_{m+1}=0$ γιατί η συνάρτηση $\hat{x}wp_m^2$ είναι περιττή συνεπώς

$$p_{m+1}(x)=xp_m(x) - \beta_{m+1}p_{m-1}(x)$$

απ' όπου έπεται ότι το p_{m+1} είναι άρτιο ή περιττό ανάλογα με το αν ο $m+1$ είναι άρτιος ή περιττός.

Πολυώνυμα Legendre

Αντί για το τυχόν διάστημα $[a,b]$ περιοριζόμαστε τώρα στο διάστημα $[-1,1]$. Αυτό δεν βλάπτει την γενικότητα αφού κάθε διάστημα $[a,b]$ απεικονίζεται μέσω μιας συναρτήσεως της μορφής $x \longmapsto cx+d$ αμφιμονοσήμαντα στο διάστημα $[-1,1]$, και αυτή η απεικόνιση αφήνει τον βαθμό των πολυωνύμων αναλλοίωτο. Περιοριζόμαστε επίσης στην περίπτωση της συναρτήσεως βάρους $w(x)=1$ (το οποίο βλάπτει βέβαια την γενικότητα...) και δίνουμε αναλυτικό τύπο για τον αναδρομικό τύπο (3.16).

3.19 Ορισμός Έστω $p_n \in \hat{\mathbb{P}}_n$, $n\in\mathbb{N}_0$, τα ως προς $(.,.)$, $(f,\varphi):=\int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx$, ορθογώνια πολυώνυμα. Αν $\gamma_n\in\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\gamma_n p_n(1)=1$, τότε τα πολυώνυμα $P_n\in\mathbb{P}_n$, $P_n:=\gamma_n p_n$ λέγονται πολυώνυμα Legendre.

Σημείωση Διαιρώντας τα πολυώνυμα P_n με τον μεγιστοβάθμιο συντελεστή τους παίρνουμε προφανώς τα πολυώνυμα p_n.

3.20 Πρόταση: Για τα πολυώνυμα του Legendre ισχύει ο αναδρομικός τύπος

(3.21) $$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \geqslant 1, \text{ όπου } P_0(x)=1,\ P_1(x)=x.$$

Απόδειξη

Έστω $p_n\in\hat{\mathbb{P}}_n$ τα ως προς $(.,.)$, $(f,\varphi):=\int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)\,dx$ ορθογώνια πολυώνυμα.

Δείχνουμε τώρα ότι ισχύει

(*) $$P_n = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}\,p_n.$$

Για $n=0,1$ η (*) ισχύει προφανώς. Έστω ότι ισχύει και για $n\leq m$. Θα δείξουμε τότε ότι ισχύει και για $m+1$. Πραγματικά, από την (3.18) έχουμε

(+) $$p_{m+1}(x)=xp_m(x) - ((p_m,p_m)/(p_{m-1},p_{m-1}))p_{m-1}(x)$$

(το διάστημα στο οποίο εργαζόμαστε είναι της μορφής $[-a,a]$ και η συνάρτηση βάρους είναι άρτια). Συνεπώς ισχύει και

(**) $$p_{m+1}(1)=p_m(1) - ((p_m,p_m)/(p_{m-1},p_{m-1}))p_{m-1}(1).$$

Τώρα λόγω

$$(p_k,p_k) = \int_{-1}^{1} p_k^2(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x'p_k^2(x)\,dx = xp_k^2(x)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} x(p_k^2(x))'\,dx =$$

$$= p_k^2(1)+p_k^2(-1) - \int_{-1}^{1} x\, 2p_k(x)\,p_k'(x)\,dx = 2p_k^2(1) - 2k\int_{-1}^{1} p_k(x)x^k\,dx = 2p_k^2(1) - 2k(p_k,p_k)$$

όπως [illegible] ισοδύναμα χρησιμοποιήσαμε ότι $\left(\begin{array}{l} p_k(-1)=(-1)^k p_k(1) \\ (p_k,\hat{x}^m)=0 \text{ για } m<k \end{array}\right)$

δηλαδή

$$(***) \qquad (p_k,p_k)_w = (2/2k+1)p_k^2(1)$$

από την (**) έχουμε

$$P_{m+1}(1) = p_m(1) - \frac{\frac{2}{2m+1}\,p_m^2(1)}{\frac{2}{2m-1}\,p_{m-1}^2(1)}\,p_{m-1}(1) = p_m(1) - \frac{2m-1}{2m+1}\,\frac{p_m^2(1)}{p_{m-1}(1)} = p_m(1)\left\{1-\frac{2m-1}{2m+1}\,\frac{p_m(1)}{p_{m-1}(1)}\right\}$$

$$= \frac{2^m}{\binom{2m}{m}}\left\{1-\frac{2m-1}{2m+1}\,\frac{2\binom{2m-2}{m-1}}{\binom{2m}{m}}\right\} = \frac{2^m}{\binom{2m}{m}}\,\frac{1}{\frac{2m+1}{m+1}} = \frac{2^{m+1}}{\binom{2m+2}{m+1}}$$

Δηλαδή $p_m = \frac{2^{m+1}}{\binom{2m+2}{m+1}} P_m$, συνεπώς η (*) ισχύει και για $n=m+1$.

Αντικαθιστώντας τώρα τα αποτελέσματα των (*) και (***) στην (+) έχουμε

$$P_{m+1}(x) = \binom{2m+2}{m+1} 2^{-(m+1)}\left[x\,p_m(x) - \frac{m^2}{4m^2-1}\,p_{m-1}(x)\right]$$

$$= \frac{2m+1}{m+1}\,x\,P_m(x) - \frac{m}{m+1}\,P_{m-1}(x), \text{ δηλαδή την (3.21).}$$

Αφού ισχύει $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, με τον αναδρομικό τύπο (3.21) μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τα πολυώνυμα Legendre, για παράδειγμα παίρνουμε

$$P_2(x)=1/2\ (3x^2-1)$$

$$P_3(x)=1/2\ (5x^3-3x)$$

$$P_4(x)=1/8\ (35x^4-30x^2+3).$$

Ας δούμε τώρα μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή των πολυωνύμων Legendre. Θεωρούμε το εξής μη γραμμικό πρόβλημα προσεγγίσεως: Ζητείται η βέλτιστη προσέγγιση της ταυτοτικά μηδενικής συναρτήσεως από το σύνολο $\hat{\mathbb{P}}_n$ στη νόρμα $\|\cdot\|_2$, $\|f\|_2=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2dx\right)^{1/2}$. Το εν λόγω πρόβλημα είναι μη γραμμικό διότι ο χώρος από τον οποίο προσεγγίζουμε δεν είναι γραμμικός. Όπως διαπιστώνει κανείς αμέσως αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το εξής γραμμικό πια πρόβλημα προσεγγίσεως:

Ζητείται η βέλτιστη προσέγγιση της συναρτήσεως q_n, $q_n(x):=x^n$ από τον $\mathbb{P}_{n-1}$. Πράγματι αν $p\in\hat{\mathbb{P}}_n$ και $q\in\mathbb{P}_{n-1}$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \|p\|_2 = \min_{r\in\hat{\mathbb{P}}_n}\|r\|_2,$$

$$(**) \qquad \|q_n-q\|_2 = \min_{r\in\mathbb{P}_{n-1}}\|q_n-r\|_2,$$

τότε προφανώς $p=q_n-q$. Τώρα η (**) είναι ισοδύναμη με

$(***)$ $\quad \forall\, r\in\mathbb{P}_{n-1}$ $\ (q_n-q,\ r)=0$. Λόγω $q_n-q\in\hat{\mathbb{P}}_n$

έχουμε όμως $q_n - q = p_n = \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \ell_n$.

Συνεπώς το πολυώνυμο $\frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \ell_n$ είναι το μοναδικό στοιχείο του $\hat{\mathbb{P}}_n$ με την ελάχιστη $\|\cdot\|_2$ στάθμη, δηλαδή ισχύει

$$(3.22) \quad \forall\, p \in \hat{\mathbb{P}}_n \setminus \left\{ \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \ell_n \right\} \quad \left\| \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \ell_n \right\|_2 < \|p\|_2 .$$

Αναπτύγματα Fourier

Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα στον X, δηλαδή τέτοιο ώστε $(e_k, e_\nu) = \delta_{k\nu}$, $k,\nu \in \mathbb{N}$. Για $x \in X$ η βέλτιστη προσέγγιση x_n του x από τον X_n,

$X_n := \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, δίνεται δια

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} (x, e_k) e_k$$

(δες την (3.12)). Θα γνωρίσουμε τώρα μερικές ιδιότητες της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, τη σχέση μεταξύ $\|x_n\|$ και $\|x\|$, και θα δούμε πότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει προς το x.

3.23 Λήμμα (Πυθαγόρειο Θεώρημα)
Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x, y \in X$. Τότε ισχύει

$$(3.24) \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y) ,$$

επομένως και

$$(3.25) \qquad (x,y) = 0 \implies \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

και γενικότερα για $x_1, \ldots, x_n \in X$

$$(3.26) \qquad \begin{gathered} \forall\, k,\nu \in \{1,\ldots,n\} \quad (x_k, x_\nu) = 0,\ k \neq \nu \\ \Longrightarrow \|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_n\|^2 . \end{gathered}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\|x+y\|^2 = (x+y,\ x+y) = (x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$$

δηλαδή τη σχέση (3.24), απ' την οποία έπεται αμέσως η (3.25).

Δείχνουμε τώρα επαγωγικά την (3.26). Για n=2 ισχύει λόγω της (3.25). Έστω ότι ισχύει για n=m-1. Τότε προφανώς $(x_1 + \ldots + x_{m-1}, x_m) = 0$ οπότε

$$\|x_1 + \ldots + x_{m-1} + x_m\|^2 = \|x_1 + \ldots + x_{m-1}\|^2 + \|x_m\|^2 = \|x_1\|^2 + \ldots + \|x_m\|^2 .$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω της (3.25) και η δεύτερη λόγω της επαγωγικής υπόθεσης.

3.27 Πρόταση (Ανισότητα του Bessel)
Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x\in X$, X_n ένας υπόχωρος του X, $\dim X_n=n$, και x_n η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον X_n. Τότε ισχύει

$$||x_n|| \leq ||x||. \tag{3.28}$$

Αν $\{e_1,\ldots,e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του X_n, τότε η (3.28) είναι ισοδύναμη με την ανισότητα του Bessel, δηλαδή την ανισότητα

$$\sum_{k=1}^{n} |(x,e_k)|^2 \leq ||x||^2. \tag{3.29}$$

Απόδειξη

Από την σχέση (*) της σελίδας 17 έχουμε

$$(x-x_n,\ x_n)=0$$

οπότε με το Πυθαγόρειο θεώρημα παίρνουμε

$$||x||^2=||(x-x_n)+x_n||^2=||x-x_n||^2+||x_n||^2$$

δηλαδή

$$||x||^2-||x_n||^2=||x-x_n||^2 \tag{3.30}$$

από την οποία έπεται αμέσως η (3.28). Τώρα σύμφωνα με την (3.12) έχουμε

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\ ,$$

οπότε με το Πυθαγόρειο θεώρημα (σχέση (3.26)) παίρνουμε

$$||x_n||^2=||\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k||^2=\sum_{k=1}^{n}||(x,e_k)e_k||^2=\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\ ||e_k||^2$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της (3.26), δηλαδή

$$||x_n||^2=\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2 \tag{3.31}$$

η οποία μαζί με την (3.28) μας δίνει την (3.29).

Δίνουμε τώρα τον ορισμό της πληρότητας ενός ορθοκανονικού συστήματος σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο.
Τη σημασία αυτού του όρου θα δούμε στα επόμενα αποτελέσματα.

3.32 Ορισμός Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα ορθοκανονικό σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ λέγεται πλήρες στον $(X,(.,.))$ αν ισχύει

$$\forall\, x\in X\quad \forall\, \varepsilon>0\quad \exists\, n\in\mathbb{N}\quad \exists\, x_n\in \mathrm{span}(e_1,\ldots,e_n)\qquad ||x-x_n||<\varepsilon.$$

Η πληρότητα ενός ορθοκανονικού συστήματος $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ σε έναν χώρο $(X,(.,.))$ με εσωτερικό γινόμενο είναι προφανώς ισοδύναμη με το εξής : Αν $x\in X$ και x_n η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $\mathrm{span}(e_1,\ldots,e_n)$ τότε η ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει προς το x .

3.33 Θεώρημα (Σχέση πληρότητας ή ισότητα του Parseval)
Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ένα ορθοκανονικό σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ είναι ακριβώς τότε πλήρες στον $(X,(.,.))$, αν ισχύει

$$\forall\, x\in X\quad \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k)|^2 = ||x||^2. \tag{3.34}$$

Απόδειξη

Έστω x_n η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον $X_n:=\mathrm{span}(e_1,\dots,e_n)$, όπου $x\in X$ τυχόν. Τότε σύμφωνα με την (3.30) έχουμε

$$\|x-x_n\|^2=\|x\|^2-\|x_n\|^2,$$

οπότε με την (3.31) παίρνουμε

$$\|x-x_n\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2. \tag{3.35}$$

Με αυτή τη σχέση ισχύει τώρα προφανώς

$$(x_n\longrightarrow x)\iff\left(\sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2\longrightarrow\|x\|^2\right)\iff\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2=\|x\|^2.$$

~~Παρατήρηση Από την ανισότητα του Bessel (δηλαδή την (3.29))~~ έπεται αμέσως ότι για κάθε $x\in X$ και για κάθε ορθοκανονικό σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (όχι κατ' ανάγκην πλήρες) η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$ συγκλίνει και ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2\leq\|x\|^2. \tag{3.36}$$

Το σημαντικό στην σχέση (3.34) είναι ότι ισχύει ισότητα. Ας σημειωθεί ότι από την (3.36) έπεται προφανώς

$$\lim_{k\to\infty}(x,e_k)=0.$$

Αν $(X,(\cdot,\cdot))$ είναι ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα, αντιστοιχούμε σε κάθε $x\in X$ τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ (χωρίς να είναι ακόμη σαφές τι σημαίνει αυτή η σειρά!). Αν τώρα το ορθοκανονικό μας σύστημα είναι πλήρες, τότε ισχύει προφανώς

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k=x,$$

δηλαδή $\lim_{n\to\infty}\|x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k\|=0$, και ακριβώς αυτό εννοούμε γράφοντας

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k. \tag{3.37}$$

Τέτοια αναπτύγματα, αναπτύγματα δηλαδή ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα, λέγονται ορθοκανονικά αναπτύγματα ή αναπτύγματα Fourier και αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αποτελούν γενίκευση των αναπτυγμάτων Fourier για περιοδικές συναρτήσεις. Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με δύο παραδείγματα πλήρων ορθοκανονικών συστημάτων το ένα από τα οποία σχετίζεται με τις προαναφερθείσες σειρές Fourier για περιοδικές συναρτήσεις.

Παραδείγματα πλήρων ορθοκανονικών συστημάτων.

1. Στον $(C[-1,1],(\cdot,\cdot))$, $(f,\varphi):=\int_{-1}^{1}f(x)\varphi(x)dx$, το σύστημα $(P_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ των πολυωνύμων Legendre είναι ορθογώνιο, επομένως το σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $e_n:=(1/\|P_n\|_2)P_n$, είναι ορθοκανονικό. Τώρα λόγω $\mathrm{span}(P_0,\dots,P_n)=\mathbb{P}_n$, της ανισότητας

$$\forall f\in C[-1,1]\quad\|f\|_2\leq\sqrt{2}\,\|f\|_\infty,$$

και του θεωρήματος προσεγγίσεως του Weierstrass

$$\forall f\in C[-1,1]\quad\forall\varepsilon>0\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad\exists f_n\in\mathbb{P}_n\quad\|f-f_n\|_\infty<\varepsilon$$

(το θεώρημα του Weierstrass θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο) το σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι πλήρες. Αν λοιπόν $f\in C[-1,1]$, και $f_n:=\sum_{k=0}^{n}(f,e_k)e_k$, τότε $||f-f_n||_2 \longrightarrow 0$. Αυτό όμως δεν σημαίνει για παράδειγμα ότι για ένα $x\in[-1,1]$ ισχύει $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ ή πολύ περισσότερο ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει στο $[-1,1]$ ομοιόμορφα προς την f.

2. Έστω $C_\pi[0,2\pi]:=\{f\in C[0,2\pi] : f(0)=f(2\pi)\}$ και το εσωτερικό γινόμενο $(f,\varphi):=\int_0^{2\pi} f(x)\varphi(x)dx$. Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις

$e_0(x):=(1/\sqrt{2\pi})$, $e_{2\nu-1}(x):=(1/\sqrt{\pi})\sin(\nu x)$, $e_{2\nu}(x):=(1/\sqrt{\pi})\cos(\nu x)$, $\nu\in\mathbb{N}$, τότε το σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ορθοκανονικό. Τώρα λόγω

$$\forall f\in C_\pi[0,2\pi] \quad ||f||_2 \leq \sqrt{2\pi}\,||f||_\infty$$

και του θεωρήματος προσεγγίσεως του Weierstrass για περιοδικές συναρτήσεις (το οποίο επίσης θα αποδειχθεί στην επόμενη παράγραφο)

$$\forall f\in C_\pi[0,2\pi] \;\; \forall \varepsilon>0 \;\; \exists n\in\mathbb{N} \;\; \exists f_n\in T_n \;\; ||f-f_n||_\infty<\varepsilon,$$

όπου $T_n:=\mathrm{span}(e_0,\dots,e_k)$ με $k:=2[(n+1)/2]$, το σύστημα $(e_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι πλήρες. Αν λοιπόν $f\in C_\pi[0,2\pi]$ και

$$(S_nf)(x) := (1/2\pi)\int_0^{2\pi} f(x)dx \; + \\ + (1/\pi)\sum_{k=1}^{n}\{ [\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\, dx]\sin kx + [\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\, dx]\cos kx \}$$

τότε $||f-S_nf||_2 \longrightarrow 0$.
Πότε για $x\in[0,2\pi]$ ισχύει $(S_nf)(x) \to f(x)$ ή $||f-S_nf||_\infty \longrightarrow 0$ είναι ασυγκρίτως δυσκολότερες ερωτήσεις.

Ασκήσεις

3.1 Δείξτε ότι σε έναν χώρο με εσωτερικό γινόμενο $(X,(.,.))$ ισχύουν

i. $\forall\, x,y\in X \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)

ii. $\forall\, x,y\in X \quad \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (ισότητα του παρ/μου).

3.2 Στον $(\mathbb{R}^4,(.,.))$, $(x,y)=x_1y_1+\dots+x_ny_n$ προσδιορίστε την βέλτιστη προσέγγιση του $x=(1,\ 2,\ 3,\ 5)$ από τον υπόχωρο

$$X := \{\, (x,y,z,0) \ : \ x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

3.3 Προσδιορίστε την βέλτιστη προσέγγιση του p, $p(x):= 5x^4+3x^3+2x^2+5x+1$ από τον $\mathbb{P}_3$ ως προς την στάθμη $\|.\|_2$,

$$\|f\|_2 := \left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

3.4 Έστω $(X,(.,.))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x\in X$ και $x_1,\dots,x_n\in X$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Θέτουμε

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \longmapsto \|x-(\alpha_1x_1+\dots+\alpha_nx_n)\|^2.$$

Δείξτε ότι το σύστημα $(\nabla\varphi)(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 0$ είναι το σύστημα των κανονικών εξισώσεων που προκύπτουν όταν προσεγγίζουμε το x από τον χώρο span $(x_1,\dots,x_n)$.

3.5 Υπολογίστε τη βέλτιστη προσέγγιση της συναρτήσεως f, $f(x):= e^x$, από τον $\mathbb{P}_3$ ως προς τη στάθμη $\|.\|_2$ όπου

$$\|\varphi\|_2 := \left(\int_{-1}^{1}|\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

3.6 Έστω $f(x):= \pi - |x-\pi|$. Υπολογίστε τα $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi}|\, f(x) - [\alpha_0+\alpha_1\cos x+\alpha_2\sin x+\alpha_3\cos 2x]\,|dx$$

να λαμβάνει την ελάχιστη δυνατή τιμή.

3.7 Έστω $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C[a,b]$, ένα ορθοκανονικό σύστημα του $C[a,b]$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(.,.)_w$, $(f,\varphi)_w := \int_a^b w(x)f(x)\varphi(x)\,dx$.

Δείξτε ότι τό σύστημα $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\varphi_n := \sqrt{w}\,e_n$ είναι ορθοκανονικό ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(.,.)$, $(f,\varphi):=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$.

3.8 Έστω $(X,(.,.))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $x_1,\dots,x_k \in X$. Δείξτε ότι αν $1 \leqslant n \leqslant m \leqslant k$ και x_n, x_m οι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από τον X_n, X_m αντίστοιχα τότε $\|x_n\| \leqslant \|x_m\|$. Θέσαμε εδώ

$$X_\ell := \mathrm{span}(x_1,\dots,x_\ell),\ 1 \leqslant l \leqslant k .$$

3.9 Έστω $f \in C[a,b]$. Δείξτε ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.