Διάλεξη 1

Δευτέρα 5/10/2020 (9-11 πμ)

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

4 ώρες διαλέξεις

2 εργαστήριο : εργ. υπολογιστών, ασκήσεις

Περιεχόμενο

1. Το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης σε ένα γραμμικό χώρο με νόρμα.

2. Προσέγγιση συνεχών συναρτήσεων από πολυώνυμα, τριγωνομετρικά πολυώνυμα και κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις (splines).

3. Θέματα αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Πηγές ενημέρωσης : ιστοσελίδα μαθήματος, περιγραφή μαθήματος

Ορισμός. Έστω σύνολο $F \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με πράξεις $+, \cdot : F \times F \to F$. Λέμε ότι η τριάδα $(F, +, \cdot)$ είναι ένα σώμα όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα: **1.2**

1. $\forall x, y \in F$: $x + y = y + x$.
2. $\forall x, y, z \in F$: $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. Υπάρχει $\varepsilon \in F$ τ.ω. $x + \varepsilon = x$ $\forall x \in F$. Συνήθως το ε συμβολίζεται με 0.
4. Για κάθε $x \in F$ υπάρχει $\bar{x} \in F$ τ.ω. $x + \bar{x} = \varepsilon$. Συνήθως το $\bar{x}$ συμβολίζεται με $-x$.
5. $\forall x, y \in F$: $x \cdot y = y \cdot x$
6. $\forall x, y, z \in F$: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
7. Υπάρχει $e \in F$ τ.ω. $e \neq \varepsilon$ και $x \cdot e = x$ $\forall x \in F$. Συνήθως το e συμβολίζεται με 1
8. Για κάθε $x \in F$ με $x \neq \varepsilon$ υπάρχει $\hat{x} \in F$ τ.ω. $x\hat{x} = e$. Συνήθως το $\hat{x}$ συμβολίζεται με $\frac{1}{x}$ ή x^{-1}
9. $\forall x, y, z \in F$: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

Ορισμός. Έστω $(F, \oplus, \odot)$ ένα σώμα, σύνολο $V \neq \emptyset$, και πράξεις $+ : V \times V \to V$, $\cdot : F \times V \to V$. Λέμε ότι η τετράδα $((F, \oplus, \odot), V, +, \cdot)$ είναι ένας γραμμικός χώρος όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα: **1.3**

1. $\forall v, w \in V$: $v + w = w + v$, 2. $\forall v, w, z$: $v + (w + z) = (v + w) + z$
3. Υπάρχει στοιχείο $0 \in V$ τ.ω. $v + 0 = v$ για κάθε $v \in V$
4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $\tilde{v} \in V$ τ.ω. $v + \tilde{v} = 0$. Το $\tilde{v}$ συμβολίζεται με $-v$.
5. $\forall v \in V$: $1 \cdot v = v$, όπου $1 \in F$ το ουδέτερο στοιχείο της πράξης $\odot$.
6. $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall v \in V$: $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \odot \mu) \cdot v$
7. $\forall \lambda \in F$, $\forall v, w \in V$: $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$
8. $\forall \lambda, \mu \in F$, $\forall v \in V$: $(\lambda \oplus \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

Παράδειγμα: Το σύνολο $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, με τις συνήθεις πράξεις πρόσθεσης και πολ/σμού είναι σώμα. Αυτό το σώμα χρησιμοποιείται συνήθως στους γραμμικούς χώρους.

Παράδειγμα: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n, +, \cdot)$. Τα $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ νοούνται εφοδιασμένα με τις συνήθεις πράξεις. $+$ είναι η συνήθης πρόσθεση διανυσμάτων. $\cdot$ είναι ο συνήθης πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα. Οι παραπάνω τετράδες είναι γραμμικοί χώροι.

1.4

Στη θεωρία προσέγγισης χρειαζόμαστε ένα εργαλείο μέτρησης μεταξύ δύο στοιχείων σε ένα γραμμικό χώρο. Αυτό το εργαλείο είναι μια μετρική η οποία ορίζεται χρησιμοποιώντας μία νόρμα.

<u>Ορισμός</u> (νόρμα): Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ με τις συνήθεις πράξεις και $\mathfrak{X}=(F,V,+,\cdot)$ ένας γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση $\nu : V \to \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι μία νόρμα στο $\mathfrak{X}$ όταν:

1. $\forall \lambda \in F, \forall z \in V: \nu(\lambda z) = |\lambda| \nu(z)$
2. $\forall z,w \in F: \nu(z+w) \leq \nu(z)+\nu(w)$ (τριγωνική ανισότητα)
3. $\nu(0)=0$
4. Αν $v \in F$ με $\nu(v)=0$, τότε $v=0$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ με τις συνήθεις πράξεις και $(F,V,+,\cdot,\nu)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Τότε: $\nu(w) \geq 0 \quad \forall w \in V$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $w \in V$. Τότε: $w+(-w)=0$ και $-w=(-1)\cdot w$. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$0=\nu(0)=\nu(w+(-w)) \leq \nu(w)+\nu(-w) = \nu(w)+\nu((-1)w) = \nu(w)+|-1|\nu(w) = 2\nu(w).$$

Άρα $\nu(w) \geq 0$. ∎

1.5

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Ο συνήθης συμβολισμός είναι $\|v\|$ αντί $\nu(v)$.
2. Μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $(F,V,+,\cdot)$ με $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ορίζει μια μετρική $d : V\times V \to [0,+\infty)$ με: $d(x,y)=\|x-y\| \quad \forall x,y \in V$.

<u>Παράδειγμα 1</u>: $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ $\|x\| := |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

νόρμα — απόλυτη τιμή

<u>Παράδειγμα 2</u>:

$$\mathfrak{X} = (\mathbb{R}, C([\alpha,b],\mathbb{R}), +, \cdot)$$

νόρμες: $\|f\|_\infty = \max_{x\in[\alpha,b]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_\alpha^b |f(x)|\,dx$

Ας δούμε γιατί $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ είναι πράγματι νόρμες στο $\mathfrak{X}$.

$\|\cdot\|_\infty$

$\boxed{1.6}$

1. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. Τότε:

$$\|\lambda f\|_\infty = \max_{x\in[\alpha,\beta]} |\lambda f(x)| = |\lambda f(x^*)| = |\lambda||f(x^*)| \le |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$$

η λf είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, $x^* \in [\alpha,\beta]$

Δηλ. $\|\lambda f\|_\infty \le |\lambda| \, \|f\|_\infty$

$$|\lambda| \, \|f\|_\infty = |\lambda| \cdot \max_{[\alpha,\beta]} |f| = |\lambda| \cdot |f(y^*)| = |\lambda f(y^*)| \le \|\lambda f\|_\infty.$$

η $|f|$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$

Δηλ. $|\lambda| \, \|f\|_\infty \le \|\lambda f\|_\infty$ K.O.K

2. Έστω: $f, g \in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$. Τότε:

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$$

$$\Rightarrow |f(x)+g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

3. Αν $f=0$, τότε $\|f\|_\infty = \max_{[\alpha,\beta]} |0| = 0$. $\boxed{1.7}$

4. Αν $f \in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ με $\|f\|_\infty = 0$. Τότε:

$\forall x \in [\alpha,\beta]: 0 \le |f(x)| \le \|f\|_\infty = 0$.

$\Rightarrow |f(x)| = 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow f = 0$

$\|\cdot\|_1$:

1. Έστω: $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. Τότε: $\|\lambda f\|_1 = \int_\alpha^\beta |\lambda f(x)|\,dx$

$$= \int_\alpha^\beta |\lambda||f(x)|\,dx = |\lambda| \cdot \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx = |\lambda| \, \|f\|_1.$$

2. Έστω $f, g \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$. Τότε:

$$|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \quad \forall x \in [\alpha,\beta]$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|\,dx \le \int_\alpha^\beta (|f(x)|+|g(x)|)\,dx$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_1 \le \int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx + \int_\alpha^\beta |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

3. $f=0 \quad \|f\|_1=\int_\alpha^b 0\,dx=0$ $\boxed{1.8}$

4: Έστω $f\in C([\alpha,b],\mathbb{R})$ και $\underbrace{\int_\alpha^b |f(x)|\,dx}_{=\|f\|_1}=0$. Θα δείξουμε ότι $f\equiv 0$ με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $f\not\equiv 0$. Τότε υπάρχει $x^*\in[\alpha,b]$ τ.ω. $f(x^*)\neq 0$. Άρα: $|f(x^*)|>0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha,b]$, έπεται ότι η $|f|$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$. Άρα: (με βάση τον ορισμό της συνέχειας) υπάρχουν $c>0$ και κλειστό διάστημα $I=[\gamma,\delta]\subset[\alpha,\beta]$ τ.ω. $|f(x)|\geq c \ \forall x\in I$.

Έπεται: $\|f\|_1=\int_\alpha^\beta |f(x)|\,dx \geq \int_\gamma^\delta |f(x)|\,dx \geq \int_\gamma^\delta c\,dx = c(\delta-\gamma)>0$. Άτοπο.

Παράδειγμα 3: $X=(\mathbb{R}, C([\alpha,\beta],\mathbb{R}),+,\cdot)$, $p>1$ $\boxed{1.9}$

$$\|\cdot\|_p : C([\alpha,b],\mathbb{R})\to[0,+\infty)$$

$$\|f\|_p := \left(\int_\alpha^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \quad \forall f\in C([\alpha,b],\mathbb{R})$$

Σχόλιο: Η νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι καλά ορισμένη επειδή η $|f|^p$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Η απόδειξη του ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι πράγματι νόρμα στον X απαιτεί κάποια βασικά αποτελέσματα.

- Ανισότητα Young
- Ανισότητα Hölder
- Ανισότητα Minkowski

$\Rightarrow$ τριγωνική ανισότητα

Ας δούμε πως [illegible] οι άλλες ιδιότητες

1. $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \forall f\in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$: $\|\lambda f\|_p=\left(\int_\alpha^\beta|\lambda f(x)|^p\right)^{1/p}$
$= \left(|\lambda|^p\int_\alpha^b|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}=|\lambda|\,\|f\|_p$.

1.10

2. Προφανώς όταν $f=0$, τότε $|f|^p=0$ και επομένως
$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{1/p} = 0$

3. Έστω $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ τ.ω $\|f\|_p = 0$. Άρα
$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0 \underset{\|\cdot\|_1}{\Longrightarrow} |f(x)|^p = 0 \ \forall x \in [a,b]$$
$$\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$$
$$\Rightarrow f = 0$$

END