11.0

Διάλεξη 11
(βίντεο)

ΜΕΜ 255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές
χε 2020
UoC

11.1

Κατασκευή της βέλτιστης προσέγγισης από υπόχωρο πεπ. διάστασης σε γραμμικό χώρο με εσ. γινόμενο

\#

Διάλεξη 10: Αν $\underline{X} = (F; V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο όπου $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$,
$\underline{Y}$ υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης,
$x \in V$, τότε υπάρχει μοναδικό $x_* \in \underline{Y}$ τ.ω.
$\|x - x_*\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in \underline{Y}$, όπου $\|\cdot\|$ είναι
η νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο.
Επιπλέον δείξαμε ότι:
$(x - x_*, y) = 0 \quad \forall y \in \underline{Y}$.
\#

Ας δούμε πως μπορούμε να "υπολογίσουμε" το $x_* \in Y$. | 11.2.

<u>Βήμα 1</u>: Προσδιορίζουμε μία βάση $\mathcal{B}=\{\varphi_j\}_{j=1}^{N}$ του Y όπου $N=\dim Y$. Επομένως το ζητούμενο $x_* \in Y$ θα γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\mathcal{B}$, δηλ. υπάρχουν μοναδικά $(\gamma_j)_{j=1}^{N} \subset F$, τ.ω. $x_* = \sum_{j=1}^{N} \gamma_j \varphi_j$. Έτσι, αρκεί να βρούμε τους συντελεστές $(\gamma_j)_{j=1}^{N}$.

<u>Βήμα 2</u>: Για να προσδιορίσουμε τα $(\gamma_j)_{j=1}^{N}$ χρησιμοποιούμε τη σχέση: $(x-x_*, y)=0 \ \forall y \in Y \Leftrightarrow (x-x_*,\varphi_\ell)=0,\ \ell=1,\dots,N$ $\Leftrightarrow (x_*,\varphi_\ell)=(x,\varphi_\ell),\ \ell=1,\dots,N \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N}\gamma_j(\varphi_j,\varphi_\ell)=(x,\varphi_\ell),$ $\ell=1,\dots,N.$

11.3

Έτσι καταλήξαμε στο γραμμικό σύστημα:

$$\underbrace{A}_{F^{N\times N}} \cdot \underbrace{\gamma}_{\in F^N} = \underbrace{b}_{\in F^N}$$

όπου $\gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_N)^T$, $b=\left((x,\varphi_1),\dots,(x,\varphi_N)\right)^T$

και $A_{\ell j}=(\varphi_j,\varphi_\ell)$ για: $1\le j,\ell\le N$.

<u>Πρόταση</u>: Ο πίνακας A είναι αυτοσυζυγής (Hermitian) δηλ. $A_{\ell j}=\overline{A_{j\ell}}$ για $1\le j,\ell\le N$, και θετικά ορισμένος δηλ. $(Az,z)_2>0\ \forall z\in F^N$ με $z\neq 0$.

Σημ. επειδή ο A είναι θ.ο., είναι αντιστρέψιμος

<u>Απόδειξη</u>:

A. Για κάθε $1\le j,\ell\le N$ έχουμε: $\overline{A_{j\ell}}=\overline{(\varphi_\ell,\varphi_j)}=(\varphi_j,\varphi_\ell)=A_{\ell j}$.

11.4

B.1 Έστω: $z \in F^N$.

$$(Az,z)_2 = \sum_{k=1}^{N} (Az)_k \overline{z_k} = \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} A_{kj} z_j \Big) \overline{z_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\varphi_j, \varphi_k)\, z_j \overline{z_k} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (z_j \varphi_j, z_k \varphi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \Big(\sum_{j=1}^{N} z_j \varphi_j, z_k \varphi_k \Big) = \Big(\sum_{j=1}^{N} z_j \varphi_j, \sum_{k=1}^{N} z_k \varphi_k \Big)$$

$$= \Big\| \sum_{j=1}^{N} z_j \varphi_j \Big\|^2 \geq 0.$$ Παρατηρούμε ότι: $(Az,z)_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \Big\| \sum_{j=1}^{N} z_j \varphi_j \Big\|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} z_j \varphi_j = 0 \underset{\text{γραμμ. ανεξ. των } (\varphi_j)_{j=1}^{N}}{\Leftrightarrow} z_j = 0, j = 1, \dots, N \Leftrightarrow z = 0.$$

Άρα: $(Az,z)_2 > 0 \quad \forall z \in F^N$ με $z \neq 0$. ■

11.5

Σημ.: $(Az,z)_2 \in \mathbb{R}$?

$$(Az,z)_2 = (z, A^* z)_2 = (z, Az)_2 = \overline{(Az,z)_2} \Rightarrow (Az,z)_2 \in \mathbb{R}.$$

$A^* = (\overline{A})^T$ $\qquad$ $A^* = A$

Δηλ. το γεγονός ότι ο πίνακας A είναι αυτοσυζυγής συνεπάγεται ότι $\underbrace{(Az,z)_2}_{= z^* A z} \in \mathbb{R}$ $\forall z \in F^N$.

■

11.6.

Για να λύσουμε αριθμητικά το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, έχουμε διάφορες επιλογές μεθόδων που στηρίζονται στις ιδιότητες του A (αυτοσυζυγής, θ.ο.).

Μέθοδος Cholesky: Επειδή ο A είναι αυτοσυζυγής και θ.ο. υπάρχει πίνακας $L \in \mathbb{F}^{N\times N}$ ο οποίος είναι κάτω τριγωνικός με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία (δηλ. ο L είναι αντιστρέψιμος) τ.ω. $A = LL^*$. Έτσι: $Ax = b \iff LL^* x = b$

$$\iff \begin{cases} Lz = b \\ L^* x = z \end{cases}$$

δύο γραμμικά συστήματα με πίνακα άνω ή κάτω τριγωνικό χρειάζεται $O(N^2)$ πράξεις.

11.7.

Αλγόριθμος κατασκευής του L όταν $F = \mathbb{R}$:

$i = 1, \dots, N$

$$\left[\begin{array}{l} j = 1, \dots, i-1 \\ L_{ij} = \dfrac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk}\right) \end{array}\right.$$

$$\boxed{A = LL^T}$$

$$L_{ii} = \left[A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (L_{ik})^2\right]^{1/2}$$

"κατά γραμμές"

$$\boxed{F = \mathbb{C}}$$

$A = LL^*$

Παράδειγμα:

$$X = (\underbrace{\mathbb{R}}_{F}, \underbrace{C([0,1],\mathbb{R})}_{V}, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$$

$$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

$Y = \mathbb{P}^3[0,1]$, $g \in C([0,1];\mathbb{R})$ με: $g(t) = t^4 \ \forall t \in [0,1]$

$B = \{\underbrace{1}_{\varphi_1}, \underbrace{t}_{\varphi_2}, \underbrace{t^2}_{\varphi_3}, \underbrace{t^3}_{\varphi_4}\}$. $\#Y = N = 4$. $g \notin Y$

Τότε: $b \in \mathbb{R}^4$ με: $b_\ell = \int_0^1 g(t)\varphi_\ell(t)\,dt = \int_0^1 t^4 \cdot t^{\ell-1}\,dt = \int_0^1 t^{\ell+3}\,dt = \frac{1}{\ell+4}$

για $\ell = 1,\dots,4$.

$$A_{j\ell} = (\varphi_\ell, \varphi_j) = \int_0^1 t^{\ell+j-2}\,dt = \frac{1}{\ell+j-1}, \quad 1 \le \ell, j \le 4.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}}_{\text{πίνακας Hilbert } \underbrace{4\times4}} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/6 \\ 1/7 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

$$H_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, \quad 1 \le i,j \le N.$$

Στην αριθμητική ανάλυση οι πίνακες Hilbert δεν είναι ευσταθείς σε πράξεις πεπερασμένης ακρίβειας, γι' αυτό αποφεύγουμε να λύνουμε τα αντίστοιχα γραμμικά συστήματα με μεθόδους όπως η απαλοιφή Gauss ή ανάλυση Cholesky όταν $N \gg 1$.

11.10.

Ερώτημα: Μπορούμε να αποφύγουμε τη λύση ενός γραμμικού συστήματος?

Απάντηση: ΝΑΙ, αν έχω την κατάλληλη βάση.

π.χ. Όταν η βάση $\mathcal{B}=(\varphi_i)_{i=1}^{N}$ είναι ορθογώνια δηλ. $(\varphi_i,\varphi_j)=0$ όταν $i\neq j$.

Τότε $A_{j\ell}=(\varphi_\ell,\varphi_j)=0$ όταν $\ell\neq j$,

που σημαίνει ότι $A=\mathrm{diag}\left((\varphi_1,\varphi_1),\cdots,(\varphi_N,\varphi_N)\right)$

$$=\mathrm{diag}\left(\|\varphi_1\|^2,\cdots,\|\varphi_N\|^2\right).$$

Τότε: $\gamma_j=\dfrac{(x,\varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2}$, $j=1,\dots,N$, και

$$x_* = \sum_{j=1}^{N}\frac{(x,\varphi_j)}{\|\varphi_j\|^2}\,\varphi_j$$

Ανάπτυγμα Fourier του x ως προς την ορθογώνια βάση $(\varphi_j)_{j=1}^{N}$.

11.11

Αν η βάση είναι ορθοκανονική, δηλ. $(\varphi_i,\varphi_j)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$ για $1\leq i,j\leq N$, τότε: $x_*=\sum_{j=1}^{N}(x,\varphi_j)\,\varphi_j$.

Ορθοκανονικοποίηση

Ερ. Πώς μπορώ να "πάρω" μια ορθοκανονική βάση όταν γνωρίζω μια οποιαδήποτε βάση του υποχώρου?

Απ. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt.

Ορισμός: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathcal{X}=(F,V,+,\cdot,(\cdot,\cdot))$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $B\subset V$ μη κενό. Λέμε ότι το B είναι ορθογώνιο όταν: $(v,w)=0$ για κάθε $v,w\in B$ με $v\neq w$. Λέμε ότι το B είναι ορθοκανονικό όταν: $(v,w)=\begin{cases}0, & v\neq w\\ 1, & v=w\end{cases}$, για κάθε $v,w\in B$.

Σημ. Σύμφωνα με τον ορισμό όταν το B είναι ορθοκανονικό τότε: $0 \notin B$, καθώς: $\|0\| = 0 \neq 1$. Όταν το B είναι ορθογώνιο τότε είναι δυνατό το 0 να είναι στοιχείο του B.

Πρόταση: Έστω: $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathcal{V} = (F, V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\emptyset \neq B \subset V$. Αν το B είναι ορθογώνιο και $0 \notin B$, τότε τα στοιχεία του B είναι γραμμ. ανεξάρτητα.

Αποδ. Έστω $(v_j)_{j=1}^{M}$ είναι M στοιχεία του B, ανά δυο διαφορετικά μεταξύ τους. Έστω: $(\lambda_j)_{j=1}^{M} \subset F$ τ.ω. $\sum_{j=1}^{M} \lambda_j v_j = 0$. Ας είναι $j_0 \in \{1, \dots, M\}$.

Τότε: $\left(\sum_{j=1}^{M} \lambda_j v_j, v_{j_0}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \underbrace{(v_j, v_{j_0})}_{\substack{=0 \text{ όταν } j \neq j_0 \\ \text{επειδή το } B \text{ είναι ορθογώνιο}}} = 0 \Rightarrow \lambda_{j_0}(v_{j_0}, v_{j_0}) = 0$

$\Rightarrow \lambda_{j_0} = 0$ καθώς $(v_{j_0}, v_{j_0}) > 0$ αφού $v_{j_0} \neq 0$.

Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι: $\lambda_{j_0} = 0 \quad \forall j_0 \in \{1, \dots, M\}$.

Έτσι τα $(v_j)_{j=1}^{M}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα ∎

Ας δώσουμε μια τυπική περιγραφή του αλγορίθμου Gram-Schmidt. Εδώ έχουμε: $\mathcal{B} = (\varphi_j)_{j=1}^{N}$ μια βάση του $\mathcal{V}$ και θα κατασκευάσουμε μια νέα βάση $\hat{\mathcal{B}} = (e_j)_{j=1}^{N}$ η οποία είναι ορθοκανονική.

Βήμα 1: $\tilde{e}_1 = \varphi_1$, $e_1 = \frac{\tilde{e}_1}{\|\tilde{e}_1\|}$.

Βήμα 2: Έστω $1 \leq n \leq N-1$ και $E_n = \text{span}\{e_1, \dots, e_n\}$.
Τότε ορίζουμε: $\tilde{e}_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}^{*}$, όπου $\varphi_{n+1}^{*} \in E_n$ και είναι η βέλτιστη προσέγγιση του φ_{n+1} από τον E_n.
Τέλος, θέτουμε: $e_{n+1} = \tilde{e}_{n+1} / \|\tilde{e}_{n+1}\|$.

Το επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι τα $(e_j)_j^N$ είναι καλά ορισμένα και ορθοκανονικά.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω: $\mathfrak{X}_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ για $n = 1, \dots, N$.

Τότε: β) $\mathfrak{X}_n = E_n$ για $n = 1, \dots, N$.

α) τα $(e_j)_{j=1}^N$ είναι καλά ορισμένα και ορθοκανονικά.

<u>Αποδ</u>. Θα κάνουμε μαθηματική επαγωγή.

<u>Βήμα 1</u>. $e_1 = \dfrac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$. Το e_1 είναι καλά ορισμένο επειδή $\varphi_1 \neq 0$ ως στοιχείο της βάσης $\mathcal{B}$. Επιπλέον έχουμε ότι $\|e_1\| = 1$ και προφανώς $\mathfrak{X}_1 = \text{span}\{\varphi_1\} = \text{span}\left\{\frac{1}{\|\varphi_1\|}\varphi_1\right\} = E_1$.

<u>Βήμα 2</u>. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $1 \leq n \leq N-1$ έχουμε: ότι $\boxed{\text{τα } (e_j)_{j=1}^n \text{ είναι καλά ορισμένα και ορθοκανονικά}}$ και ότι: $\boxed{E_n = \mathfrak{X}_n}$. Σύμφωνα με τον αλγόριθμο: $e_{n+1} = \dfrac{\tilde{e}_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}$

με: $\tilde{e}_{n+1} = \varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}^*$ όπου: $\varphi_{n+1}^* \in E_n$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση του φ_{n+1} από τον E_n. Παρατηρούμε ότι $\tilde{e}_{n+1} \neq 0$, διότι: $\tilde{e}_{n+1} = 0 \Rightarrow \varphi_{n+1} = \varphi_{n+1}^* \Rightarrow \varphi_{n+1} \in E_n \Rightarrow \varphi_{n+1} \in \mathfrak{X}_n = \text{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ $\Rightarrow$ άτοπο διότι τα $(\varphi_j)_{j=1}^{n+1}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα. Έτσι εξασφαλίζουμε ότι το e_{n+1} είναι καλά ορισμένο. Επιπλέον, $\|e_{n+1}\| = 1$. Μένει να εξασφαλίσουμε ότι: $(e_{n+1}, e_j) = 0$ για $j = 1, \dots, n$. Αυτό ισχύει διότι: $e_{n+1} = \dfrac{1}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}(\varphi_{n+1} - \varphi_{n+1}^*) \perp E_n$. Έτσι το $(e_j)_{j=1}^{n+1}$ είναι ορθοκανονικό. Για να κλείσει η απόδειξη πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι: $E_{n+1} = \mathfrak{X}_{n+1}$. Επειδή $\dim \mathfrak{X}_{n+1} = n+1$ και $\dim E_{n+1} = n+1$ (καθώς τα $(e_j)_{j=1}^{n+1}$ είναι γραμμ. ανεξ. ως ορθοκανονικά) αρκεί να δείξουμε ότι $E_{n+1} \subseteq \mathfrak{X}_{n+1}$

Η ιδέα είναι να πάρουμε: $w \in E_{n+1}$ και να δείξουμε ότι $w \in X_{n+1}$. **11.16**

Έτσι:

$$w = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j e_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j + \lambda_{n+1} e_{n+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j + \frac{\lambda_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}\left(\varphi_{n+1} - \varphi^{*}_{n+1}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j + \frac{\lambda_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}\left(\varphi_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{n+1}, e_j)\, e_j\right)$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left[\lambda_j - \frac{\lambda_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}(\varphi_{n+1}, e_j)\right] e_j}_{\in E_n = X_n \subset X_{n+1}} + \underbrace{\frac{\lambda_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}\varphi_{n+1}}_{\in X_{n+1}} \in X_{n+1}.$$

<u>Παρατήρηση:</u> **11.17**

Έτσι ο αλγόριθμος Gram-Schmidt έχει την μορφή:

<u>Βήμα 1</u>: $e_1 = \frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|}$

<u>Βήμα 2</u>: $e_{n+1} = \varphi_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{n+1}, e_j)\, e_j$, $n = 1, \dots, N-1$

ή

<u>Βήμα 1</u>: $\tilde{e}_1 = \varphi_1$, $e_1 = \varphi_1 / \|\varphi_1\|$.

<u>Βήμα 2</u>: $\tilde{e}_{n+1} = \varphi_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(\varphi_{n+1}, \tilde{e}_j)}{\|\tilde{e}_j\|^2}\, \tilde{e}_j$

$e_{n+1} = \frac{\tilde{e}_{n+1}}{\|\tilde{e}_{n+1}\|}$ $\qquad n = 1, \dots, N-1$

Η $(e_n)_{n=1}^{N}$ εξαρτάται από τη σειρά που παίρνουμε τα στοιχεία της $\mathcal{B}$. $\square$