Διάλεξη 12
(βίντεο)

ΜΕΜ 255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές
ΧΕ 2020
UoC

Αναδρομή Διάλεξης 11

Έστω: $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $(F, V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

Έστω $(v_j)_{j=1}^{N}$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V. Τότε ο αλγόριθμος Gram-Schmid παράγει $(\tilde{e}_j)_{j=1}^{N} \subset V$ τα οποία είναι: μη μηδενικά και ορθογώνια δηλ. $\tilde{e}_j \neq 0$ για $j=1,\dots,N$ και $(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k)=0$ για $1\leq j,k\leq N$ με: $j\neq k$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε:

$$\tilde{e}_1 = v_1 \quad \text{και} \quad \tilde{e}_{j+1} = v_{j+1} - \underbrace{\sum_{k=1}^{j} \frac{(v_{j+1}, \tilde{e}_k)}{\|\tilde{e}_k\|^2}\tilde{e}_k}_{\substack{\text{η βέλτιστη προσέγγιση} \\ \text{του } v_{j+1} \text{ από τον} \\ \operatorname{span}\{\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_j\}}}, \quad \text{για } j=1,\dots,N-1.$$

Επιπλέον:
$$\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_m\} = \operatorname{span}\{\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_m\} \quad \text{για } m=1,\dots,N.$$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν κατά την εφαρμογή του αλγ. Gram-Schmidt προέκυπτε: $\tilde{e}_j=0$ τότε είτε $v_1=0$ όταν $j=1$ είτε $v_{j+1}\in\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_j\}$ που σημαί-

να ότι τα $\{v_1,\dots,v_{j+1}\}$ είναι γραμμ. εξαρτημένα. Αυτό σημαίνει ότι 'τρέχοντας' το αλγόριθμο Gram-Schmidt μπορούμε να ελέγξουμε αν ένα σύνολο έχει γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία. 12.2

#

Ορθογώνια πολυώνυμα: κατασκευή και ιδιότητες

Η κατασκευή ορθογωνίων πολυωνύμων γίνεται στο πλαίσιο των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$.

Θεωρούμε το γραμμικό χώρο $(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$ και εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ στον $(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$. Επομένως ο $\mathbb{P}^m[a,b]$ είναι ένας υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης για $m\in\mathbb{N}_0$. Ορίζουμε: $\mathbb{P}[a,b]=\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathbb{P}^m[a,b]$ που είναι ο χώρος των πολυωνύμων περιορισμένων στο $[a,b]$, ο οποίος είναι επίσης υπόχωρος του $(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$ αλλά με άπειρη διάσταση.

Ας διαλέξουμε $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}\subset\mathbb{P}[a,b]$ τ.ω. 12.3

$$\boxed{\mathbb{P}^m[a,b]=\text{span}\{\underbrace{\varphi_0,\dots,\varphi_m}_{m+1}\}\quad\forall m\in\mathbb{N}_0}$$

όπου τα $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Εφαρμόζοντας το αλγόριθμο Gram-Schmidt παίρνουμε ορθογώνια μη μηδενικά πολυώνυμα $(\tilde{e}_j)_{j=0}^{\infty}$ τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$\tilde{e}_1=\varphi_1,\quad \tilde{e}_{n+1}=\varphi_{n+1}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(\varphi_{n+1},\tilde{e}_k)}{\|\tilde{e}_k\|^2}\tilde{e}_k\quad\forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Σημ. (Κάθε επιλογή γραμμικώς ανεξάρτητων πολυωνύμων $(\varphi_j)_{j=0}^{\infty}$ δίνει διαφορετική ακολουθία $(\tilde{e}_j)_{j=0}^{\infty}$. Ακόμα και η αλλαγή σειράς των όρων αλλάζει το αποτέλεσμα.)

Επιπλέον, έχουμε: $\text{span}\{\underbrace{\tilde{e}_1,\dots,\tilde{e}_m}_{\text{μία ορθογώνια βάση του}}\}=\mathbb{P}^m[a,b]$

Η πιο ενδιαφέρουσα επιλογή είναι:

$$\varphi_0(t) = 1 \quad \forall t \in [a,b],$$
$$\varphi_j(t) = t^j \quad \forall t \in [a,b] \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Θα συμβολίζουμε: $\tilde{P}_j(t) = \hat{e}_j(t) \quad \forall j \in \mathbb{N}_0$, όπου $(\hat{e}_j)_{j=0}^{\infty}$ η ορθογώνια ακολουθία που προκύπτει από τον αλγόριθμο Gram-Schmidt. δηλ.

$$\tilde{P}_0(t) = 1 \ \ \forall t \in [a,b], \quad \tilde{P}_{j+1}(t) = t^{j+1} - \sum_{k=0}^{j} \frac{(t^{j+1}, \tilde{P}_k)}{\|\tilde{P}_k\|^2} \tilde{P}_k(t) \quad \forall t \in [a,b] \ \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

<u>Ορισμός</u>: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$$\hat{\mathbb{P}}^m[a,b] = \{p \in \mathbb{P}^m[a,b] : p(t) = t^m + q(t) \ \ \forall t \in [a,b] \text{ όπου } q \in \mathbb{P}^{m-1}[a,b]\},$$

δηλ. το $\hat{\mathbb{P}}^m[a,b]$ είναι τα πολυώνυμα του $\mathbb{P}^m[a,b]$ μεγιστοβάθμια όρο ίσο με 1. $\square$

<u>Πρόταση</u>: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $\tilde{P}_n \in \hat{\mathbb{P}}^n[a,b]$.

<u>Απόδ.</u> Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς n.

<u>$n=1$</u>: $\tilde{P}_1(t) = t - \sum_{k=0}^{0} \frac{(t, \tilde{P}_0)}{\|\tilde{P}_0\|^2} \tilde{P}_0(t) \quad \forall t \in [a,b]$

Επειδή: $\tilde{P}_0(t) := 1 \ \forall t \in [a,b]$, επεται: $\tilde{P}_1(t) = t - \underbrace{\frac{(t, \tilde{P}_0)}{\|\tilde{P}_0\|^2}}_{\in \mathbb{P}^0[a,b]} \in \hat{\mathbb{P}}^1[a,b]$.

<u>$n \to n+1$</u>: Από τον τύπο έχουμε ότι:

$$\tilde{P}_{n+1}(t) = t^{n+1} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(t^{n+1}, \tilde{P}_k)}{\|\tilde{P}_k\|^2} \tilde{P}_k(t)}_{\in \operatorname{Span}\{\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_n\} = \mathbb{P}^n[a,b]} \in \hat{\mathbb{P}}^{n+1}[a,b].$$

■

Πρόταση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: 12.6.

$$\|\tilde{p}_n\| = \inf_{p \in \hat{\mathbb{P}}^n[a,b]} \|p\|.$$

Σημ. Έτσι το $\tilde{p}_n$ είναι το στοιχείο του $\hat{\mathbb{P}}^n[a,b]$ με τη μικρότερη νόρμα.

Απόδειξη:

Ιδέα: Χρησιμοποιούμε το μηχανισμό βέλτιστης προσέγγισης που είναι ενσωματωμένος στον αλγ. Gram-Schmidt.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\inf_{p \in \hat{\mathbb{P}}^n[a,b]} \|p\| = \inf_{q \in \mathbb{P}^{n-1}[a,b]} \|t^n + q\| = \inf_{q \in \mathbb{P}^{n-1}[a,b]} \|t^n - q\| = \operatorname{dist}(t^n, \mathbb{P}^{n-1}[a,b]) = \Big\| t^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t^n, \tilde{p}_k)}{\|\tilde{p}_k\|^2} \tilde{p}_k \Big\| = \|\tilde{p}_n\|$$

$$\mathbb{P}^{n-1}[a,b] = \operatorname{span}\overbrace{\{\tilde{p}_j\}_{j=0}^{n-1}}^{\text{ορθογώνια}}$$

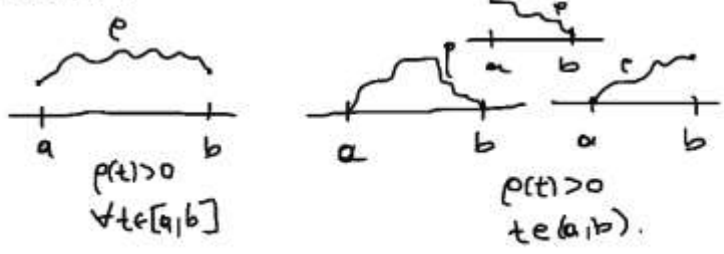
$\blacksquare$

Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν για οποιοδήποτε εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ στον $C([a,b],\mathbb{R})$. 12.7

Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τι επιπλέον αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε όταν το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ έχει τη μορφή:

$$(f,g) = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t)\, dt \quad \forall f,g \in C([a,b];\mathbb{R})$$

όπου: $\rho \in C([a,b];\mathbb{R})$, για την οποία: $\rho(t) > 0 \ \forall t \in [a,b]$ ή $\rho(t) > 0 \ \forall t \in (a,b)$, και η οποία καλείται "συνάρτηση βάρους".



$\rho(t) > 0$ $\forall t \in [a,b]$

$\rho(t) > 0$ $t \in (a,b)$.

Θα αποδείξουμε μια αναδρομική σχέση ανάμεσα στα $(\tilde{P}_n)_{n=0}^{\infty}$. 12.8

Πρόταση:

$\tilde{P}_0 \equiv 1$, $\tilde{P}_1(t) = t - b_0$ $\quad \forall t \in [a,b]$

$$\tilde{P}_{n+1}(t) = (t - b_n)\tilde{P}_n(t) - \gamma_n \tilde{P}_{n-1}(t) \quad \forall t \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$$

όπου: $b_n = \dfrac{(t\tilde{P}_n, \tilde{P}_n)}{\|\tilde{P}_n\|^2}$ $\forall n \geq 0$, $\gamma_n = \dfrac{\|\tilde{P}_n\|^2}{\|\tilde{P}_{n-1}\|^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. και

$(f,g) = \int_a^b \rho(t) g(t) f(t)\,dt$ $\forall f,g \in C([a,b],\mathbb{R})$

με $\rho \in C([a,b],\mathbb{R})$ μια συνάρτηση βάρους.

Απόδειξη:

Α. $\tilde{P}_0 \equiv 1$ εξ' ορισμού

Β. $\tilde{P}_1(t) = t - \dfrac{(t,\tilde{P}_0)}{\|\tilde{P}_0\|^2}\underbrace{\tilde{P}_0(t)}_{=1} = t - \underbrace{\dfrac{(t\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)}{\|\tilde{P}_0\|^2}}_{=b_0} = t - b_0.$ 12.9

Γ. Έστω: $n \in \mathbb{N}$. Τότε ορίζουμε:

$$q(t) = (t - b_n)\tilde{P}_n(t) - \gamma_n \tilde{P}_{n-1}(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

Επειδή: $\tilde{P}_n \in \hat{\mathbb{P}}^n[a,b]$ και $\tilde{P}_{n-1} \in \hat{\mathbb{P}}^{n-1}[a,b]$, έπεται ότι:

$t\tilde{P}_n \in \hat{\mathbb{P}}^{n+1}[a,b]$ και $-b_n\tilde{P}_n - \gamma_n\tilde{P}_{n-1} \in \mathbb{P}^n[a,b]$.

Άρα: $q = t\tilde{P}_n - b_n\tilde{P}_n - \gamma_n\tilde{P}_{n-1} \in \hat{\mathbb{P}}^{n+1}[a,b]$.

Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι: $q = \tilde{P}_{n+1}$, ή ισοδύναμα

$v := q - \tilde{P}_{n+1} = 0$. Παρατηρούμε πρώτα ότι: $v \in \mathbb{P}^n[a,b]$

επειδή: $q, \tilde{P}_{n+1} \in \hat{\mathbb{P}}^{n+1}[a,b]$. Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε ότι:

$(v,w) = 0$ $\forall w \in \mathbb{P}^n[a,b]$.

Έχοντας αυτό το αποτέλεσμα, επειδή $v \in \mathbb{P}^n[a,b]$, για $w=v$ θα έχουμε: $\|v\|^2=(v,v)=0$ και επομένως $v=0$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι: $\mathbb{P}^n[a,b]=\text{span}\{\tilde{p}_0,\dots,\tilde{p}_n\}$, αρκεί να δείξουμε ότι: **12.10**

$$(v,\tilde{p}_j)=0 \quad , \; j=0,\dots,n.$$

<u>Περίπτωση 1:</u> $j=n$

$$(v,\tilde{p}_n)=(q-\tilde{p}_{n+1},\tilde{p}_n)=(q,\tilde{p}_n)-\underbrace{(\tilde{p}_{n+1},\tilde{p}_n)}_{=0}$$

$$=\left((t-\beta_n)\tilde{p}_n-\gamma_n\tilde{p}_{n-1},\tilde{p}_n\right)$$

$$=(t\tilde{p}_n,\tilde{p}_n)-\beta_n(\tilde{p}_n,\tilde{p}_n)-\gamma_n\underbrace{(\tilde{p}_{n-1},\tilde{p}_n)}_{=0}$$

$$=\beta_n\|\tilde{p}_n\|^2-\beta_n\|\tilde{p}_n\|^2$$

$$=0.$$

12.11

<u>Περίπτωση 2:</u> $j=n-1$

$$(v,\tilde{p}_{n-1})=\left((t-\beta_n)\tilde{p}_n-\gamma_n\tilde{p}_{n-1},\tilde{p}_{n-1}\right)$$

$$=(t\tilde{p}_n,\tilde{p}_{n-1})-\beta_n\underbrace{(\tilde{p}_n,\tilde{p}_{n-1})}_{=0}-\gamma_n(\tilde{p}_{n-1},\tilde{p}_{n-1})$$

$$=(t\tilde{p}_n,\tilde{p}_{n-1})-\frac{\|\tilde{p}_n\|^2}{\|\tilde{p}_{n-1}\|^2}\cdot\|\tilde{p}_{n-1}\|^2$$

$$=(t\tilde{p}_n,\tilde{p}_{n-1})-\|\tilde{p}_n\|^2$$

$$=(t\tilde{p}_n,\tilde{p}_{n-1})-(\tilde{p}_n,\tilde{p}_n)=(\tilde{p}_n,t\tilde{p}_{n-1})-(\tilde{p}_n,\tilde{p}_n)$$

$$=(\tilde{p}_n,t\cdot\tilde{p}_{n-1}-\tilde{p}_n).$$

Επειδή: $\tilde{p}_{n-1}\in\hat{\mathbb{P}}^{n-1}[a,b]$ έπεται ότι: $t\tilde{p}_{n-1}\in\hat{\mathbb{P}}^n[a,b]$. Επειδή $\tilde{p}_n\in\hat{\mathbb{P}}^n[a,b]$, τελικά: $t\tilde{p}_{n-1}-\tilde{p}_n\in\mathbb{P}^{n-1}[a,b]$. Αυτό συνεπάγεται ότι: $(\tilde{p}_n, t\tilde{p}_{n-1} - \tilde{p}_n) = 0$. Έτσι: $(r, \tilde{p}_{n-1}) = 0$. 19.12

<u>Περίπτωση 3</u>: $0 \le j \le n-2$.

Τότε: $(r, \tilde{p}_{n-2}) = ((t-b_n)\tilde{p}_n - \gamma_n \tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-2})$

$$= (t\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n-2}) - b_n \underbrace{(\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n-2})}_{=0} - \gamma_n \underbrace{(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-2})}_{=0}$$

$$= \underbrace{(\tilde{p}_n, \overbrace{t\,\tilde{p}_{n-2}}^{\in \mathbb{P}^{n-1}[a,b]})}_{=0} = 0.$$

επειδή $\tilde{p}_n \perp \mathbb{P}^{n-1}[a,b]$
καθώς $(\tilde{p}_n, \tilde{p}_j) = 0$ για $j = 0, \dots, n-1$.

<u>Ερ.</u> Πού χρησιμοποιήσαμε ότι $(f,g) = \int_a^b \rho f g\, dt$? 19.13

<u>Απ.</u> Το χρησιμοποιήσαμε στην Περ. 2 όταν γράψαμε:

$$(t\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n-1}) = (\tilde{p}_n, t\tilde{p}_{n-1})$$

και στην Περίπτωση 3 όταν γράψαμε:

$$(t\tilde{p}_n, \tilde{p}_{n-2}) = (\tilde{p}_n, t\tilde{p}_{n-2}).$$

Αυτές οι σχέσεις χρησιμοποιούμε ότι: $(fg, w) = (f, gw)$ για καθε $f, g, w \in C([a,b], \mathbb{R})$ (*), μια ιδιότητα που δεν ισχύει γενικά.

Άρα το αποτέλεσμα της προηγούμενης πρότασης μπορεί να επεκταθεί όταν το εσ. γινόμενο ικανοποιεί την (*)

12.14

Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε τα ορθογώνια πολυώνυμα $(\tilde{p}_n)_{n=0}^{\infty}$ δουλεύοντας μέσω γραμμικό χώρο $(\mathbb{R}, C^1([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$ και με εσωτερικό γινόμενο: $(f,g)_1 := \int_a^b \rho f(t)g(t)\,dt + \int_a^b \rho f'(t)g'(t)\,dt$ για κάθε $f,g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$, όπου $\rho \in C([a,b];\mathbb{R})$ μια συνάρτηση βάρους. Αυτό μπορώ να το κάνω επειδή $\mathbb{P}[a,b] \subset C^1([a,b],\mathbb{R})$. Είναι προφανές ότι:

$$(fg,w)_1 \neq (f,gw)_1$$

$$\int_a^b \rho fgw\,dt + \int_a^b \rho f'g'w\,dt + \int_a^b \rho fg'w'\,dt \neq \int_a^b \rho fgw\,dt + \int_a^b \rho f'g'w\,dt + \int_a^b \rho f'gw'\,dt$$

12.15

Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση όπου: $[a,b]=[-\delta,\delta]$ για κάποιο $\delta>0$ και η συνάρτηση βάρους $\rho \in C([-\delta,\delta];\mathbb{R})$ είναι άρτια στο $[-\delta,\delta]$.

Θα δείξουμε ότι:

<u>Πρόταση:</u> Το $\tilde{p}_n$ είναι άρτια συνάρτηση όταν η είναι άρτιο και περιττή συνάρτηση όταν το η είναι περιττός, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Απόδ.</u> Ουσιαστικά θέλουμε να δείξουμε ότι τα $(\tilde{p}_{2k})_{k=0}^{\infty}$ είναι άρτιες συναρτήσεις και $(\tilde{p}_{2k+1})_{k=0}^{\infty}$ είναι περιττές συναρτήσεις. Η απόδειξη θα γίνει με μαθ. επαγωγή.

<u>k=0</u>: $\tilde{p}_0=1$ άρτια και $\tilde{p}_1(t)=t-b_0=t-\frac{1}{\|\tilde{p}_0\|^2}\int_{-\delta}^{\delta}\underbrace{\underbrace{\rho(t)}_{\text{άρτια}}\cdot\underbrace{t}_{\text{περιττή}}}_{\text{περιττή}}\,dt = t-0$ $=t$ άρα περιττή.

12.16

K→K+1: Υποθέτουμε ότι τα $(\tilde{P}_{2\ell})_{\ell=0}^{K}$ είναι άρτια και τα $(\tilde{P}_{2\ell+1})_{\ell=0}^{K}$ είναι περιττά. Τότε:

$$\tilde{P}_{2(k+1)}(t) = \tilde{P}_{2k+2}(t) = (t-b_{2k+1})\tilde{P}_{2k+1}(t) - \gamma_{2k+1}\cdot\tilde{P}_{2k}(t).$$

$$\boxed{b_{2k+1} = \frac{1}{\|\tilde{P}_{2k+1}\|^2}\int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\rho(t)\, t\, \underbrace{(\overset{\text{περιττή}}{\tilde{P}_{2k+1}(t)})^2}_{\text{άρτια}}}_{\text{περιττή}}\, dt = 0}$$

$$\Rightarrow \tilde{P}_{2k+2}(t) = \underbrace{\underbrace{t}_{\text{περιττή}}\cdot\underbrace{\tilde{P}_{2k+1}(t)}_{\text{περιττή}}}_{\text{άρτια}} - \underbrace{\overset{\text{σταθ.}}{\gamma_{2k+1}}\,\overset{\text{άρτια}}{\tilde{P}_{2k}(t)}}_{\text{άρτια}} \Rightarrow \tilde{P}_{2k+2} \text{ άρτια.}$$

12.17

$$\tilde{P}_{2(k+1)+1}(t) = \tilde{P}_{2k+3}(t)$$

$$= (t-b_{2k+2})\tilde{P}_{2k+2}(t) - \gamma_{2k+2}(t)\,\tilde{P}_{2k+1}(t).$$

Εδώ: $b_{2k+2} = \dfrac{1}{\|\tilde{P}_{2k+2}\|_2^2}\displaystyle\int_{-\delta}^{\delta} \underbrace{\overset{\text{άρτια}}{\rho(t)}\, \underbrace{t\, \underbrace{(\overset{\text{άρτια}}{\tilde{P}_{2k+2}(t)})^2}_{\text{άρτια}}}_{\text{περιττή}}}_{\text{περιττή}}\, dt = 0$. Έτσι:

$$\tilde{P}_{2k+3}(t) = \underbrace{\underbrace{t}_{\text{περιττή}}\cdot\underbrace{\tilde{P}_{2k+2}(t)}_{\text{άρτια}}}_{\text{περιττή}} - \underbrace{\underbrace{\gamma_{2k+2}}_{\text{σταθ. (άρτια)}}\,\underbrace{\tilde{P}_{2k+1}(t)}_{\text{περιττή}}}_{\text{περιττή}} \Rightarrow \tilde{P}_{2k+3} \text{ περιττή} \blacksquare$$

12.18

Έτσι:

$$\tilde{P}_0(t) = 1 \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$

$$\tilde{P}_1(t) = t \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$

$$\tilde{P}_{n+1}(t) = t\tilde{P}_n(t) - \gamma_n \tilde{P}_{n-1}(t) \quad \forall t \in [-\delta, \delta], \forall n \in \mathbb{N}.$$

επειδή: $b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$.

<u>Παρατήρηση</u>: $p \in \mathbb{P}^M[-\delta,\delta]$ και p άρτιο στο $[-\delta,\delta]$.

Γράφοντας: $p(t) = \sum_{j=0}^{M} \alpha_j t^j \; \forall t \in [-\delta,\delta]$, έχουμε ότι $p(t) = p(-t) \; \forall t \in [0,\delta]$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{M} \alpha_j t^j = \sum_{j=0}^{M} \alpha_j (-t)^j \; \forall t \in [0,\delta] \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{M} \underbrace{\alpha_j (1-(-1)^j) t^j}_{\in \mathbb{P}^M[0,\delta]} = 0 \; \forall t \in [0,\delta]$$

12.19

$$\Leftrightarrow \alpha_j (1-(-1)^j) = 0 \quad j = 0, \dots, M.$$

Όταν j περιττός τότε: $(1-(-1)^j) = 2 \neq 0$ και $\alpha_j = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές των περιττών δυνάμεων στο p είναι μηδενικοί.

Όταν p είναι περιττό στο $[-\delta,\delta]$ και $p(t) = \sum_{j=0}^{M} \alpha_j t^j \; \forall t \in [-\delta,\delta]$

Τότε: $p(t) = -p(-t) \; \forall t \in [0,\delta]$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{M} \left(\alpha_j t^j + \alpha_j (-t)^j\right) = 0 \quad \forall t \in [0,\delta]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{M} \alpha_j (1+(-1)^j) t^j = 0 \; \forall t \in [0,\delta] \Leftrightarrow \alpha_j (1+(-1)^j) = 0 \; j = 0, \dots, M.$$

Άρα όταν j άρτιος έπεται: $\alpha_j = 0$, δηλ. οι συντελεστές των άρτιων δυνάμεων θα είναι μηδενικοί. $\square$