13.0

Διάλεξη 13
(βίντεο)

ΜΕΜ 255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές
ΧΕ 2020
UoC

Αναδρομή Διάλεξης 12.

13.1

1. Εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt στο: $(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ και στην ακολουθία $(t^n)_{n=0}^{\infty}$ πολυωνύμων του $\mathbb{P}[a,b]$ καταλήξαμε σε μία ακολουθία $(\tilde{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ μη μηδενικών ορθογωνίων δηλ. $\tilde{P}_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ και $(\tilde{P}_n, \tilde{P}_\ell) = 0$ όταν $n \neq \ell$ και $n, \ell \in \mathbb{N}_0$.
Επιπλέον ισχύει ότι: $\tilde{P}_m \in \widehat{\mathbb{P}}^m[a,b]$ $\forall m \in \mathbb{N}_0$ και $\|\tilde{P}_n\| = \min\limits_{q \in \widehat{\mathbb{P}}^m[a,b]} \|q\|$.

2. Έστω ότι: $(f,g) = \int_a^b \rho(t) f(t) g(t)\, dt$ για κάθε $f, g \in C([a,b];\mathbb{R})$ όπου $\rho \in C([a,b];\mathbb{R})$ με: $\rho(t) > 0$ για κάθε $t \in (a,b)$. Τότε τα ορθογώνια πολυώνυμα $(\tilde{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ προσδιορίζονται ως εξής:

$$\tilde{P}_0(t) = 1,\ \tilde{P}_1(t) = t - \beta_0,\ \tilde{P}_{n+1}(t) = (t - \beta_n)\tilde{P}_n(t) - \gamma_n \tilde{P}_{n-1}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

όπου: $\beta_n := \dfrac{(t\tilde{P}_n, \tilde{P}_n)}{\|\tilde{P}_n\|^2}$ $\forall n \geq 0$, $\gamma_n := \dfrac{\|\tilde{P}_n\|^2}{\|\tilde{P}_{n-1}\|^2}$ $\forall n \geq 1$.

13.2

Επιπλέον, όταν $[a,b]=[-\alpha,\alpha]$ και ρ άρτια στο $[-\alpha,\alpha]$

Τότε $\tilde{P}_n(t)=\begin{cases} \text{άρτιο όταν } n=2k \text{ για κάποιο } k\in\mathbb{N}_0 \\ \text{περιττό όταν } n=2k+1 \text{ για κάποιο } k\in\mathbb{N}_0 \end{cases}$, για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$. Επιπλέον:

$$\tilde{P}_0(t)=1,\ \tilde{P}_1(t)=t \text{ και } \tilde{P}_{n+1}(t)=t\tilde{P}_n(t)-\gamma_n\tilde{P}_{n-1}(t) \quad \forall n\geq 1,$$

δηλ. $b_n=0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$.

#

Τα ορθογώνια πολυώνυμα Legendre

13.3

Περιοριζόμαστε στο χώρο με εσωτερικό γινόμενο: $(\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$

όπου: $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g\in C([-1,1];\mathbb{R})$, δηλ. η συνάρτηση βάρους ικανοποιεί $\rho(t)=1 \ \forall t\in[-1,1]$ (άρτια).

<u>Ορισμός</u>: Τα πολυώνυμα Legendre $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ ορίζονται ως εξής:

$$P_n(t)=\frac{1}{\tilde{P}_n(1)}\tilde{P}_n(t) \quad \forall t\in[-1,1].$$

<u>Σημ.</u> Τα $(\tilde{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα του $\mathbb{P}[-1,1]$ τα οποία προκύπτουν από την ορθογωνοποίηση κατά Gram-Schmidt των $(t^n)_{n=0}^{\infty}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Από τον ορισμό προκύπτει ότι: $P_n(1)=1 \ \forall n\in\mathbb{N}_0$ και $(P_\ell,P_m)=0$ όταν $\ell\neq m$ και $\ell,m\in\mathbb{N}_0$.

13.4

ΕΡΩΤΗΣΗ: $\tilde{P}_n(1)\neq 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$?

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: ΝΑΙ.

ΠΡΟΤΑΣΗ:
$$\tilde{P}_n(1)=\frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \quad \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

Απόδειξη: Με μαθηματική επαγωγή. Για απλοποίηση στο συμβολισμό θέτουμε: $\lambda_n = 2^n/\binom{2n}{n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$.

Βήμα 1: Επειδή $\tilde{P}_0(t)=1$ και $\tilde{P}_1(t)=t$ για κάθε $t\in[-1,1]$, έπεται: $\tilde{P}_0(1)=1$ και $\tilde{P}_1(1)=1$. Επιπλέον, $\lambda_0=\frac{2^0}{\binom{0}{0}}=1$, $\lambda_1=\frac{2}{\binom{2}{1}}=\frac{2}{\frac{2!}{1!\,1!}}=\frac{2}{2}=1$. Έτσι: $\tilde{P}_0(1)=\lambda_0$ και $\tilde{P}_1(1)=\lambda_1$.

13.5

Βήμα 2: Υποθέτουμε ότι: $\tilde{P}_k(1)=\lambda_k$ για: $k=0,\dots,m$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}$. Σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε ότι: $\tilde{P}_{m+1}(1)=\lambda_{m+1}$.

Με βάση τον αναδρομικό τύπο για τα ορθογώνια πολυώνυμα για $t=1$ έχουμε:
$$\tilde{P}_{m+1}(1)=1\cdot\tilde{P}_m(1)-\gamma_m\tilde{P}_{m-1}(1)$$
$$=\lambda_m-\frac{(\tilde{P}_m,\tilde{P}_m)}{(\tilde{P}_{m-1},\tilde{P}_{m-1})}\lambda_{m-1}.$$
Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις νόρμες: $\|\tilde{P}_m\|$ και $\|\tilde{P}_{m-1}\|$.

Έστω: $\ell\in\mathbb{N}_0$. Τότε:
$$(\tilde{P}_\ell,\tilde{P}_\ell)=\int_{-1}^{1}(\tilde{P}_\ell(t))^2\,dt=\int_{-1}^{1}t'(\tilde{P}_\ell(t))^2\,dt=t(\tilde{P}_\ell(t))^2\Big|_{t=-1}^{t=1}-\int_{-1}^{1}t\,2\tilde{P}_\ell(t)\tilde{P}_\ell'(t)\,dt$$
$$=(\tilde{P}_\ell(1))^2+(\tilde{P}_\ell(-1))^2-2\int_{-1}^{1}\tilde{P}_\ell(t)\cdot t\cdot\tilde{P}_\ell'(t)\,dt.$$

13.6

Επειδή το $\tilde{P}_\ell$ είναι άρτιο όταν ℓ άρτιο και περιττό όταν ℓ περιττό, έπεται ότι: $\tilde{P}_\ell(1)=\tilde{P}_\ell(-1)$ ή $\tilde{P}_\ell(1)=-\tilde{P}_\ell(-1)$. Άρα:

$$\left(\tilde{P}_\ell(1)\right)^2=\left(\tilde{P}_\ell(-1)\right)^2.$$

Έτσι ο τύπος παίρνει τη μορφή:

$$(\tilde{P}_\ell,\tilde{P}_\ell)=2(\tilde{P}_\ell(1))^2-2\int_{-1}^{1}t\cdot\tilde{P}_\ell(t)\cdot\tilde{P}_\ell'(t)\,dt.$$

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς την τιμή του ℓ.

13.7

Περίπτωση 1: $\ell=0$.

Τότε $\tilde{P}_0(t)=1\ \forall t\in[-1,1]$. Επομένως: $\tilde{P}_0'(t)=0\ \ \forall t\in[-1,1]$.

Άρα: $(\tilde{P}_0,\tilde{P}_0)=2(\tilde{P}_0(1))^2=2$.

Περίπτωση 2: $\ell=1$

Τότε: $\tilde{P}_1(t)=t\ \forall t\in[-1,1]$, το οποίο δίνει: $\tilde{P}_1'(t)=1\ \forall t\in[-1,1]$.

Άρα: $(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)=2(\tilde{P}_1(1))^2-2\int_{-1}^{1}t\cdot\tilde{P}_1(t)\cdot 1\,dt=2-2\int_{-1}^{1}(\tilde{P}_1(t))^2dt$

$=2-2(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)$. Έτσι: $3(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)=2$ ή $(\tilde{P}_1,\tilde{P}_1)=2/3$.

Περίπτωση 3: $\ell \geq 2$

Επειδή $\tilde{P}_\ell \in \hat{\mathbb{P}}^{\ell}[-1,1]$, έχουμε $\tilde{P}_\ell(t) = t^{\ell} + q(t)$ $\forall t \in [-1,1]$ για κάποιο $q \in \mathbb{P}^{\ell-1}[-1,1]$.

Έτσι: $\tilde{P}_\ell'(t) = \ell\, t^{\ell-1} + q'(t)$ $\forall t \in [-1,1]$, $q' \in \mathbb{P}^{\ell-2}[-1,1]$ και

$$(\tilde{P}_\ell,\tilde{P}_\ell) = 2(\tilde{P}_\ell(1))^2 - 2\int_{-1}^{1} \tilde{P}_\ell(t)\cdot t\cdot\left(\ell t^{\ell-1} + q'(t)\right)dt$$

$$= 2(\tilde{P}_\ell(1))^2 - 2\ell\int_{-1}^{1} t^{\ell}\,\tilde{P}_\ell(t) - 2\underbrace{\int_{-1}^{1}\tilde{P}_\ell(t)\cdot \underbrace{t\cdot q'(t)}_{\in \mathbb{P}^{\ell-1}[-1,1]}\,dt}_{=0 \text{ επειδή } \tilde{P}_\ell \perp \mathbb{P}^{\ell-1}[-1,1]}$$

$$= 2(\tilde{P}_\ell(1))^2 - 2\ell\int_{-1}^{1}\tilde{P}_\ell(t)\,\underbrace{(t^{\ell}+q(t))}_{\tilde{P}_\ell(t)}\,dt + 2\ell\underbrace{\int_{-1}^{1}\tilde{P}_\ell(t)\,\overbrace{q(t)}^{\in \mathbb{P}^{\ell-1}[-1,1]}dt}_{=0}$$

$$= 2(\tilde{P}_\ell(1))^2 - 2\ell(\tilde{P}_\ell,\tilde{P}_\ell).$$

Έτσι: $(\tilde{P}_\ell,\tilde{P}_\ell) = \frac{2}{2\ell+1}(\tilde{P}_\ell(1))^2$.

Έτσι:

$$(\tilde{P}_\ell,\tilde{P}_\ell) = \frac{2}{2\ell+1}\left(\tilde{P}_\ell(1)\right)^2 \quad \forall \ell \geq 0.$$

Επομένως:

$$\frac{(\tilde{P}_m,\tilde{P}_m)}{(\tilde{P}_{m-1},\tilde{P}_{m-1})} = \frac{\frac{2}{2m+1}(\tilde{P}_m(1))^2}{\frac{2}{2m-2+1}(\tilde{P}_{m-1}(1))^2} = \frac{\frac{2}{2m+1}}{\frac{2}{2m-1}}\cdot\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_{m-1})^2}$$

$$= \frac{2m-1}{2m+1}\cdot\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_{m-1})^2}.$$

και

$$\tilde{P}_{m+1}(1) = \lambda_m - \frac{2m-1}{2m+1}\cdot\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_{m-1})^{\cancel{2}}}\,\cancel{\lambda_{m-1}} = \lambda_m\left[1 - \frac{2m-1}{2m+1}\,\frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}\right]$$

13.10

$$= \lambda_m \left\{1 - \frac{2m-1}{2m+1}\cdot\frac{2^m}{2^{m-1}}\cdot\frac{m!\,m!}{(2m)!}\;\frac{(2m-2)!}{(m-1)!\,(m-1)!}\right\}$$

$$= \lambda_m\cdot\left\{1-\frac{2m-1}{2m+1}\cdot 2\cdot\frac{m^2}{(2m)!}\,(2m-2)!\right\} = \lambda_m\left[1-\frac{2m-1}{2m+1}\cdot \cancel{2}\,\frac{m^{\cancel{2}}}{(2m-1)(\cancel{2m})}\right]$$

$$= \lambda_m\left[1-\frac{\cancel{(2m-1)}}{(2m+1)}\,\frac{m}{\cancel{(2m-1)}}\right] = \lambda_m\left(1-\frac{m}{2m+1}\right) = \lambda_m\,\frac{2m+1-m}{2m+1}$$

$$= \lambda_m\cdot\frac{m+1}{2m+1} = \frac{2^m\cdot(m+1)\overbrace{m!\,m!}^{=\frac{1}{\binom{2m}{m}}}}{(2m)!\,(2m+1)} = \frac{2^m\,(2m+2)\,(m+1)\;m!\;m!}{(2m)!\,(2m+1)\;(2m+2)}$$

$$= \frac{2^{m+1}\,(m+1)\,(m+1)\;m!\;m!}{\underset{\displaystyle (2m+2)!}{\underset{\shortparallel}{(2(m+1))!}}} = \frac{2^{m+1}}{\frac{(2(m+1))!}{(m+1)!\,(m+1)!}} = \frac{2^{m+1}}{\binom{2(m+1)}{m+1}} = \lambda_{m+1}.$$

∎

13.11

Ο τελικός τύπος για τα πολυώνυμα Legendre είναι:

$$\ell_n \mapsto \frac{1}{\tilde P_n(1)}$$

$$P_n(t) = \ell_n\,\tilde P_n(t) \quad \forall t\in[-1,1],\ \forall n\in\mathbb{N}_0,$$

όπου: $\ell_n = 2^{-n}\binom{2n}{n}\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$. Επι: $P_n\in \mathbb{P}^n[-1,1]\setminus\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$, $n\geq 1$

Πόρισμα: $\|P_n\| = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2}\ \forall n\in\mathbb{N}_0$.

Απόδειξη: Είδαμε ότι: $(\tilde P_n,\tilde P_n) = \frac{2}{2n+1}\,(\tilde P_n(1))^2\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \left(\frac{\tilde P_n}{\tilde P_n(1)},\frac{\tilde P_n}{\tilde P_n(1)}\right) = \frac{2}{2n+1}\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0 \Rightarrow (P_n,P_n) = \frac{2}{2n+1}\ \ \forall n\in\mathbb{N}_0.$$

∎

13.12

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\|\tilde{P}_n\| = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$

Απόδειξη: Είδαμε ότι:

$$(\tilde{P}_n, \tilde{P}_n) = \frac{2}{2n+1} \cdot (\tilde{P}_n(1))^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \|\tilde{P}_n\| = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2} |\tilde{P}_n(1)| \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Rightarrow \|\tilde{P}_n\| = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2} \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

∎