14.0

Διάλεξη 14
(βίντεο)

ΜΕΜ 255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές
ΧΕ 2020
UoC

14.1

Αναδρομή Διάλεξης 13

Πολυώνυμα Legendre:

$$P_n \in \mathbb{P}^n[-1,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

όπου:
- $P_n(1) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$
- $P_n = \ell_n \tilde{P}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$, με: $\ell_n := 2^{-n}\binom{2n}{n} = \frac{1}{\tilde{P}_n(1)}$

  και $(\tilde{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ τα ορθογώνια πολυώνυμα που παράγονται από τον αλγόριθμο Gram-Schmidt πάνω στα $(t^n)_{n=0}^{\infty}$ με το εσωτερικό γινόμενο: $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f,g \in C([-1,1];\mathbb{R})$.

- $P_n \in \mathbb{P}^n[-1,1] \setminus \mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και
  $P_0 \in \mathbb{P}^0[-1,1]$ επειδή $\tilde{P}_\ell \in \hat{\mathbb{P}}^\ell[-1,1]$ $\forall \ell \geq 0$.
- $\|P_n\| = \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{1/2}$ $\forall n \geq 0$.

Επίσης δείξαμε ότι: $(\tilde{P}_\ell, \tilde{P}_\ell) = \frac{2}{2\ell+1} \cdot \left[\frac{2^\ell}{\binom{2\ell}{\ell}}\right]^2 = \frac{2}{2\ell+1} \cdot \frac{1}{k_\ell^2}$, $\forall \ell \geq 0$.

#

Πρόταση:

$P_0(t) = 1$, $P_1(t) = t$ και

$$(n+1) P_{n+1}(t) = (2n+1) t P_n(t) - n P_{n-1}(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη:

1. Επειδή: $\tilde{P}_0(t) = 1$, $k_0 = 1$, $\tilde{P}_1(t) = t$ και $k_1 = 1$, έπεται, ότι:
   $P_0(t) = 1$ και $P_1(t) = t$.

2. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από τον αναδρομικό τύπο των ορθογωνίων πολυωνύμων έπεται: $\tilde{P}_{n+1}(t) = t \tilde{P}_n(t) - \frac{\|\tilde{P}_n\|^2}{\|\tilde{P}_{n-1}\|^2} \tilde{P}_{n-1}(t)$.

14.4

'Ετσι:

$$\frac{P_{n+1}(t)}{\ell_{n+1}} = t\,\frac{P_n(t)}{\ell_n} - \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2}{2(n-1)+1}}\,\frac{\frac{1}{\ell_n^2}}{\frac{1}{(\ell_{n-1})^2}}\,\frac{1}{\ell_{n-1}}\,P_{n-1}(t)$$

$$\Rightarrow P_{n+1}(t) = t\,\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\,P_n(t) - \frac{2n-1}{2n+1}\,\frac{\ell_{n+1}\ell_{n-1}}{\ell_n^2}\,P_{n-1}(t) \quad \boxed{1}$$

Επιπλέον έχουμε:

$$\frac{\ell_{k+1}}{\ell_k} = \frac{2^k}{2^{k+1}}\,\frac{\binom{2k+2}{k+1}}{\binom{2k}{k}} = \frac{1}{2}\,\frac{(2k+2)!}{(k+1)!\,(k+1)!}\,\frac{k!\,k!}{(2k)!} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)\,2}$$

$$= \frac{2k+1}{k+1}$$ για κάθε $k\in\mathbb{N}$. Έτσι: $\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{2n+1}{n+1}$ $\boxed{2}$ και

$$\frac{\ell_{n+1}\ell_{n-1}}{\ell_n^2} = \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n}\cdot\frac{\ell_{n-1}}{\ell_n} = \frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{\ell_n/\ell_{n-1}} = \frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{1}{\frac{2n-1}{n}} = \frac{(2n+1)n}{(n+1)(2n-1)} \quad \boxed{3}$$

14.5

Από τις $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ και $\boxed{3}$ έπεται:

$$P_{n+1}(t) = t\,\frac{2n+1}{n+1}\,P_n(t) - \frac{\cancel{2n-1}}{\cancel{2n+1}}\cdot\frac{n\cancel{(2n+1)}}{(n+1)\cancel{(2n-1)}}\,P_{n-1}(t)$$

$$\Rightarrow (n+1)\,P_{n+1}(t) = t\,(2n+1)\,P_n(t) - n\,P_{n-1}(t).$$

■

Εφαρμογή: Έχουμε: $P_0(t)=1$ και $P_1(t)=t$. Για $n=1$ ο αναδρομικός τύπος δίνει: $2\cdot P_2(t) = t\cdot 3\,P_1(t) - 1\cdot P_0(t) = 3t^2-1$ ή ισοδύναμα $P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}$. Παρατηρούμε ότι: $P_2(t)=0 \Leftrightarrow 3t^2=1 \Leftrightarrow t^2=\frac{1}{3} \Leftrightarrow t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

'Ετσι το P_2 έχει ακριβώς 2 διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

14.6

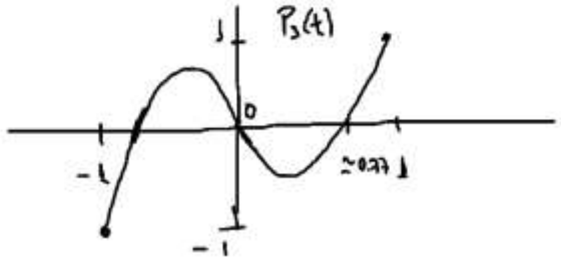
Για $n=2$ έπεται:

$$3P_3(t) = t(2\cdot 2+1)P_2(t) - 2P_1(t)$$

$$\Leftrightarrow 3P_3(t) = 5t\,\frac{3t^2-1}{2} - 2t \Leftrightarrow 3P_3(t) = \frac{15}{2}t^3 - \frac{5}{2}t - \frac{4}{2}t$$

$$\Leftrightarrow 3P_3(t) = \frac{1}{2}(15t^3-9t) \Leftrightarrow P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t) \Leftrightarrow P_3(t) = \frac{5}{2}t\left(t^2-\frac{3}{5}\right)$$

$\Leftrightarrow P_3(t) = \frac{5}{2}t\left(t-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)$. Άρα η P_3 έχει 3 διαφορετικές πραγματικές ρίζες.



κ.ο.κ.

14.7

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε ένα αποτέλεσμα πάνω στις ρίζες των ορθογωνίων πολυωνύμων, το οποίο ισχύει για τα πολυώνυμα Legendre ως ειδική περίπτωση.

Πρόταση: Έστω $(\tilde{P}_n)_{n=0}^{\infty}$ η ακολουθία των ορθογωνίων πολυωνύμων του $\mathbb{P}[a,b]$ η οποία προκύπτει από την εφαρμογή του αλγορίθμου Gram-Schmidt στην ακολουθία πολυωνύμων $(t^n)_{n=0}^{\infty}$ με το εσωτερικό γινόμενο: $(f,g)=\int_a^b \rho(t)f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f,g\in C([a,b];\mathbb{R})$ όπου $\rho\in C([a,b],\mathbb{R})$ μια συνάρτηση βάρους. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, το $\tilde{P}_n$ έχει n διακριτές πραγματικές ρίζες που ανήκουν στο (a,b).

14.8

<u>Απόδειξη:</u>

Α. Σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε ότι τα $(\tilde{p}_n)_{n=1}^{\infty}$ έχουν τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα στο (a,b). Η ιδέα είναι να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει εναλλαγή προσήμου στο (a,b) για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αυτό θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω ότι δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $k\in\mathbb{N}$ τ.ω. το $\tilde{p}_k(t)>0\ \forall t\in(a,b)$ ή $\tilde{p}_k(t)<0\ \forall t\in(a,b)$. Επειδή $\tilde{p}_0(t)=1$ και το $\tilde{p}_k$ είναι κάθετο στο $\tilde{p}_0$, έπεται: $\int_a^b \rho\, \tilde{p}_k(t)\tilde{p}_0(t)\,dt=0$

$$\Rightarrow \int_a^b \rho(t)\tilde{p}_k(t)\,dt=0 \Rightarrow \int_a^b \rho(t)\,|\tilde{p}_k(t)|\,dt=0 \underset{\text{συνεχής}}{\Rightarrow} \rho\cdot|\tilde{p}_k|=0 \text{ στο } (a,b)$$

$\Rightarrow \tilde{p}_k(t)=0$ στο (a,b). Άτοπο! Έτσι το $\tilde{p}_n$ εναλλάσσει το πρόσημο στο (a,b) και επομένως έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a,b).

14.9

Β. Το επόμενο βήμα είναι να εξασφαλίσουμε ότι κάθε ρίζα του $\tilde{p}_n$ στο (a,b) είναι απλή, για οποιοδήποτε $n\in\mathbb{N}$.

Έστω ότι για κάποιο $k\in\mathbb{N}$ το $\tilde{p}_k$ έχει ρίζα $z\in(a,b)$ η οποία πολλαπλή. (Φυσικά $k\geq 2$ διότι το $\tilde{p}_1\in\hat{P}^1[a,b]$ δεν μπορεί να έχει πολλαπλές ρίζες καθώς: $\tilde{p}_1'(t)=1$). Έτσι: $\tilde{p}_k(t)=(t-z)^2q(t)$ για κάποιο $q\in P^{k-2}[a,b]$. Λόγω ορθογωνιότητας έχουμε:

$(\tilde{p}_k|q)=0 \Rightarrow \int_a^b \rho(t)\cdot(t-z)^2q^2(t)\,dt=0$. Έστω: $v(t)=(t-z)^2q^2(t)\ \forall t\in[a,b]$. Τότε: $\int_a^b \underbrace{\rho(t)\cdot v(t)}_{\geq 0}\,dt=0$

$\Rightarrow \rho(t)\cdot v(t)=0\ \forall t\in(a,b) \Rightarrow v(t)=0\ \forall t\in(a,b)$

$\Rightarrow q(t)=0\ \forall t\in(a,b),\ t\neq z \Rightarrow \tilde{p}_k(t)=0\ \forall t\in(a,b),\ t\neq z$ <u>Άτοπο</u> διότι το $\tilde{p}_k$ έχει το πολύ k ρίζες στο $\mathbb{R}$.

12.10

Γ. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε το $\tilde{P}_n$ έχει στο (a,b) k απλές ρίζες $(z_\ell)_{\ell=1}^{k}$ όπου: $1 \leq k \leq n$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $k=n$.

Έστω: $k<n$. Επειδή τα $(z_\ell)_{\ell=1}^{k}$ είναι ρίζες του $\tilde{P}_n$, έχουμε:
$\tilde{P}_n(t) = \prod_{\ell=1}^{k}(t-z_\ell)\cdot q(t)$ για κάποιο $q \in \mathbb{P}^{n-k}[a,b]$, οποίο δεν έχει ρίζα στο (a,b). Άρα: $q(t)>0$ $\forall t\in(a,b)$ ή $q(t)<0$ $\forall t \in (a,b)$.
Ας ορίσουμε: $r(t)=\prod_{\ell=1}^{k}(t-z_\ell)$ $\forall t\in[a,b]$. Επειδή: $r\in\mathbb{P}^{k}[a,b]$ και $k<n$, έπεται: $(\tilde{P}_k, r)=0 \Rightarrow \int_a^b \rho(t)\cdot q(t)\cdot r^2(t)\,dt=0$

$$\Rightarrow \int_a^b \underbrace{\rho(t)\,|q(t)|\,r^2(t)}_{\geq 0}\,dt=0 \Rightarrow \underset{>0}{\rho}\cdot\underset{>0}{|q|}\cdot r^2=0 \text{ στο } (a,b)$$

$\Rightarrow r^2(t)=0$ $\forall t\in(a,b)$ Άτοπο επειδή το r έχει ακριβώς k ρίζες στο (a,b). ∎

14.11

Ερ. Μπορούμε να συμπεράνουμε "μοναδικότητα" των πολυωνύμων Legendre?

Απ. ΝΑΙ.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Υπάρχει μοναδική ακολουθία $(Q_n)_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{P}[-1,1]$ τ.ω.

α) $Q_n(1)=1$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$

β) $(Q_n,Q_\ell)=\int_{-1}^{1}Q_n(t)Q_\ell(t)\,dt=0$ για κάθε $n,\ell\in\mathbb{N}_0$ με: $n\neq\ell$

γ) $Q_n\in\mathbb{P}^n[-1,1]$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$.

Απόδειξη:
A. Η ακολουθία $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ των πολυωνύμων Legendre ικανοποιεί τα α), β), γ). Έτσι θα ασχοληθούμε με τη μοναδικότητα.

14.12

B. Επειδή: $Q_0 \in \mathbb{P}^0[-1,1]$, έπεται ότι: $Q_0(t)=c$ $\forall t\in[-1,1]$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$. Έτσι: $Q_0(1)=1$ μας δίνει $c=1$.
Αναγκαστικά: $Q_0\equiv 1 = P_0$

Γ. Επίσης $Q_1\in \mathbb{P}^1[-1,1]$, συνεπάγεται ότι: $Q_1(t)=\alpha_1 t+b_1$ για κάθε $t\in[-1,1]$. Επιπλέον, έχουμε τα ακόλουθα:

$$\left.\begin{array}{l}\int_{-1}^{1} Q_1(t)Q_0(t)\,dt=0 \\ Q_1(1)=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l}\int_{-1}^{1}(\alpha_1 t+b_1)dt=0 \\ \alpha_1+b_1=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} b_1=0 \\ \alpha_1=1\end{array}\right\}$$

Έτσι, αναγκαστικά, $Q_1(t)=t = P_1$

Δ. Από τα B και Γ, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:
$Q_0=P_0$ και $Q_1=P_1$

14.13

E. Θα αποδείξουμε με μαθηματική επαγωγή ότι:
$Q_n=P_n$ $\forall n\in\mathbb{N}_0$.

<u>Βήμα 1</u>: Ήδη $Q_0=P_0, Q_1=P_1$.

<u>Βήμα 2</u>: Έστω ότι: $Q_k=P_k$ για $k=0,\dots,m$, για κάποιο $m\in\mathbb{N}$. Επειδή τα $(P_\ell)_{\ell=0}^{m+1}$ αποτελούν μία βάση του $\mathbb{P}^{m+1}[-1,1]$ και $Q_{m+1}\in\mathbb{P}^{m+1}[-1,1]$, έπεται ότι:
$Q_{m+1}=\sum_{\ell=0}^{m+1}\underbrace{\lambda_\ell}_{\in\mathbb{R}} P_\ell = \lambda_{m+1}P_{m+1}+\sum_{\ell=0}^{m}\lambda_\ell P_\ell$. Επειδή τα $(Q_k)_{k=0}^{m+1}$ είναι ορθογώνια...

για $k=0,\dots,m$, έπεται: 14.14

$$0=(Q_{m+1},Q_k)=\lambda_{m+1}(P_{m+1},Q_k)+\sum_{\ell=0}^{m}\lambda_\ell(P_\ell,Q_k)$$

$$\underset{\text{επαγ. υποθ.}}{=}\lambda_{m+1}\underbrace{(P_{m+1},P_k)}_{=0}+\sum_{\ell=0}^{m}\lambda_\ell\underbrace{(P_\ell,P_k)}_{=0\ \text{όταν}\ \ell\neq k}$$

$$=\lambda_k\|P_k\|^2.$$

Άρα: $\lambda_k=0$ για $k=0,\dots,m$. Έτσι: $Q_{m+1}=\lambda_{m+1}P_{m+1}$.

Επιπλέον: $Q_{m+1}(1)=\lambda_{m+1}P_{m+1}(1) \Rightarrow 1=\lambda_{m+1}1 \Rightarrow \lambda_{m+1}=1$.

Τελικά: $Q_{m+1}=P_{m+1}$. ■

14.15

Παρατήρηση:

Τα πολυώνυμα Legendre είναι μη μηδενικά πολυώνυμα τα οποία είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο:

$$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g\in C([-1,1];\mathbb{R}).$$

Ερώτηση: Τι μπορούμε να κάνουμε αν αναζητάμε πολυώνυμα τα οποία να είναι ορθογώνια ως προς το εσ. γινόμενο:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g\in C([a,b];\mathbb{R}).$$

Απάντηση: Αλλαγή μεταβλητής. Πιο συγκεκριμένα:

$$\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)\,dt=\int_a^b P_n\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)P_m\left(\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right)\frac{2}{b-a}\,dx.$$

$$x=\frac{a+b}{2}+t\frac{(b-a)}{2} \ \text{ή}\ t=\frac{x-\frac{a+b}{2}}{(b-a)/2}=\frac{2x-(a+b)}{b-a}$$

Ορίζουμε: $Q_n(x) = P_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right) \quad \forall x \in [a,b]$.

Προφανώς: $Q_n(b) = P_n\left(\frac{b-a}{b-a}\right) = P_n(1) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$

$$\int_a^b Q_n(x)\, Q_m(x)\, dx = 0 \qquad \forall\, n,m \in \mathbb{N}_0,\ n \neq m$$

και $\quad Q_0 \equiv 1$, $Q_n \in \mathbb{P}^n[a,b] \setminus \mathbb{P}^{n-1}[a,b] \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

∎