15.0

Διάλεξη 15

(βίντεο)

ΜΕΜ255 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

15.1

Ορθοκανονικά Συστήματα

Ορισμός (πυκνό σύνολο)

Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathbb{X} = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και $A \subset V$. Λέμε ότι το A είναι πυκνό στον $\mathbb{X}$ όταν για κάθε $v \in V$ υπάρχει ακολουθία $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ τέτοια ώστε: $\lim\limits_{n \to +\infty} \|v - \alpha_n\| = 0$.

Παράδειγμα 1: Στον $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, |\cdot|)$ όπου $|\cdot|$ η απόλυτη τιμή πραγματικών αριθμών, το σύνολο $A = \mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό. $\square$

Παράδειγμα 2: Στον $(\mathbb{R}, C[a,b], +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$, όπου: $\|f\|_\infty := \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|$ για κάθε $f \in C([a,b]; \mathbb{R})$, το σύνολο $\mathbb{P}[a,b]$ όλων των πολυωνύμων περιορισμένων σε $[a,b]$ είναι πυκνό (Θ. Weierstrass). $\square$

Παράδειγμα 3: Έστω ο γραμμικός χώρος με νόρμα:

$(\mathbb{R}, \ell^1_{\mathbb{R}}, +, \cdot, \|\cdot\|_1)$ όπου: $\ell^1_{\mathbb{R}} := \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty\}$

και $\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad \forall x \in \ell^1_{\mathbb{R}}$. Επιπλέον, ορίζουμε:

$$A = \{(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^1_{\mathbb{R}} : \text{υπάρχει } n_0 \in \mathbb{N} \text{ τ.ω. } b_n = 0 \ \forall n \geq n_0\},$$

δηλ. το A είναι το σύνολο των ακολουθιών του $\ell^1_{\mathbb{R}}$ οι οποίες είναι τελικά μηδενικές. Θα δείξουμε ότι το A είναι πυκνό στον $\ell^1_{\mathbb{R}}$.

Έστω $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^1_{\mathbb{R}}$. Τότε ορίζουμε $(\alpha^n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ ως εξής:

$$\alpha_i^n = \begin{cases} x_i, & i = 1, \dots, n \\ 0 & i \geq n+1 \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Τότε: $\|x - \alpha^n\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - \alpha_i^n| = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x_i| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, καθώς η $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|$ συγκλίνει. $\square$

Ορισμός

Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X = (F, V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, $E = (e_j)_{j=1}^{\infty}$ μια ακολουθία στοιχείων του V και $E_m := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_m\}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$.

Λέμε ότι το E είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στο X όταν: $(e_\kappa, e_\lambda) = \delta_{\kappa\lambda}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι το E είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο X όταν $(e_\kappa, e_\lambda) = \delta_{\kappa\lambda}$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}$ και το σύνολο $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ είναι πυκνό στο X.

Παράδειγμα: Έστω ο γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $X = (\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ όπου: $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f, g \in C([-1,1];\mathbb{R})$. Το σύνολο $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_{n=0}^{\infty}$ (όπου $\|\cdot\|$ η νόρμα

15.4

η οποία παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ τα πολυώνυμα Legendre) είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον X.

Παράδειγμα: $X = (\mathbb{R}, \ell^2_{\mathbb{R}}, +, \cdot, (\cdot,\cdot)_2)$ όπου:

$$\ell^2_{\mathbb{R}} = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty \right\}$$

και $(x,y)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \forall x,y \in \ell^2_{\mathbb{R}}$.

Έστω $E = (e^n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell^2_{\mathbb{R}}$ με: $e^n_k = \begin{cases} 1 & \text{όταν } k=n \\ 0 & \text{όταν } k \neq n \end{cases}$ $\forall k \in \mathbb{N}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έτσι: $(e^n,e^n)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} (e^n_k)^2 = (e^n_n)^2 = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Όταν $m,n \in \mathbb{N}$ με $m \neq n$, τότε: $(e^n,e^m)_2 = \sum_{k=1}^{\infty} e^n_k e^m_k = e^n_m e^m_m + e^n_n e^m_n = 0\cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0$.

Έτσι το E είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον X.

15.5

Θα δείξουμε επιπλέον ότι το E είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον X.

Έστω $x \in \ell^2_{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε: $(b^n)_{n=1}^{\infty} \subset \ell^2_{\mathbb{R}}$ ως εξής:

$$b^n_i = \begin{cases} x_i & \text{όταν } i=1,\dots,n, \\ 0 & \text{όταν } i \geq n+1 \end{cases} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Άρα:

$$b^n = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \in \operatorname{span}\{e^1,\dots,e^n\} = E_n \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα: $(b^n)_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Επιπλέον, ισχύει:

$$\|x-b^n\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - b^n_k|^2\right]^{1/2} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k)^2\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

καθώς η $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ συγκλίνει. Επομένως το $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ είναι πυκνό στον X. ∎

15.6

Θεώρημα:

Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X=(F,V,+,\cdot,(\cdot,\cdot))$ ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα στον X.

Τότε για κάθε $x\in V$ ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) & \sum_{k=1}^{N} |(x,e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall N\in\mathbb{N} \\ \beta) & \sum_{k=1}^{\infty} |(x,e_k)|^2 \leq \|x\|^2 \end{array}\right\} \text{Ανισότητα Bessel.}$$

$$\gamma) \quad \lim_{k\to+\infty} |(x,e_k)| = 0$$

15.7

Απόδειξη: Έστω $x\in V$.

α) Έστω $N\in\mathbb{N}$. Έστω ακόμα $x_N^* \in E_N = \text{span}\{e_1,\dots,e_N\}$ η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον E_N, η οποία είναι καλά ορισμένη επειδή ο E_N είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης.

Τότε: $x_N^* = \sum_{k=1}^{N} (x,e_k)e_k$. Έτσι έχουμε ότι:

$$\|x_N^*\|^2 = (x_N^*, x_N^*) = \left(\sum_{k=1}^{N} (x,e_k)e_k, \sum_{k'=1}^{N} (x,e_{k'})e_{k'} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{k'=1}^{N} (x,e_k)\overline{(x,e_{k'})}\,(e_k,e_{k'}) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{k'=1}^{N} (x,e_k)\overline{(x,e_{k'})}\,\delta_{kk'}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} (x,e_k)\overline{(x,e_k)} = \sum_{k=1}^{N} |(x,e_k)|^2. \quad \boxed{1}$$

Επειδή: $(x - x_N^*, y) = 0 \quad \forall y \in E_N$

$$\underset{y = x_N^*}{\Rightarrow} (x - x_N^*, x_N^*) = 0 \Rightarrow \|x_N^*\|^2 = \underbrace{(x, x_N^*)}_{\in \mathbb{R}}$$

$$\Rightarrow \|x_N^*\|^2 = |(x, x_N^*)|$$

$$\underset{C\text{-}S}{\Rightarrow} \|x_N^*\|^2 \leq \|x\| \, \|x_N^*\|$$

$$\Rightarrow \|x_N^*\| \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow \|x_N^*\|^2 \leq \|x\|^2 \qquad \boxed{2}$$

Από τις $\boxed{1}$ και $\boxed{2}$ έπεται: $\|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{N} |(x, e_k)|^2$.

β) Έστω: $S_N = \sum_{k=1}^{N} |(x, e_k)|^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$. Η $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ είναι προφανώς αύξουσα και φραγμένη άνω διότι: $S_N \leq \|x\|^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$. Άρα η $(S_N)_{N=1}^{\infty}$ συγκλίνει, δηλ. η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ συγκλίνει. Επιπλέον,

$\lim_{N \to +\infty} S_N \leq \|x\|^2$, το οποίο δίνει: $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 \leq \|x\|^2$.

γ) Επειδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ συγκλίνει, έπεται ότι:

$$\lim_{k \to +\infty} |(x, e_k)|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \sqrt{|(x, e_k)|^2} = 0 \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} |(x, e_k)| = 0.$$

∎

④ Θεώρημα: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathcal{X} = (F, V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ ένα ορθοκανονικό σύστημα στο $\mathcal{X}$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) το $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο $\mathcal{X}$

β) $\forall x \in V$: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2$ Ισότητα Parseval.

γ) $\forall x \in V$: $\left\| x - \sum_{k=1}^{N} (x, e_k) e_k \right\| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$ ή $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k = x$ Ανάπτυγμα Fourier

συντελεστές Fourier

Απόδειξη: Έστω $E_m = \mathrm{span}(e_j)_{j=1}^{m}$ για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορθοκανονικό σύστημα.

$(α) \Rightarrow (β)$. Υποθέτουμε ότι το $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ είναι πλήρες. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι ισχύει η ισότητα Parseval.

Έστω $x \in V$. Τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Περίπτωση 1: $x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Τότε υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω. $x \in E_{m_0}$. Επειδή το σύνολο $(e_j)_{j=1}^{m_0}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του E_{m_0}, έπεται: $x = \sum_{k=1}^{m_0} (x, e_k) e_k$. Επιπλέον, για κάθε $\ell \geq m_0 + 1$, έπεται: $(x, e_\ell) = \sum_{k=1}^{m_0} (x, e_k) \underbrace{(e_k, e_\ell)}_{= 0 \text{ καθώς } \ell \neq k} = 0$. Τελικά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)|^2 = \sum_{k=1}^{m_0} |(x, e_k)|^2 = \|x\|^2.$$ (βλ. απόδειξη προηγ. Θεωρήματος)

Περίπτωση 2: $x \notin \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. Επειδή το ορθοκανονικό σύστημα $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ είναι πλήρες, έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ τ.ω. $\lim_{n \to +\infty} \|x - z_n\| = 0$. $\boxed{1}$

15.12

Έστω ότι: $z_n \in E_{k_n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\ell_n := \max_{1\le i\le n} k_i$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Επειδή, $E_\ell \subsetneq E_{\ell+1}$ για κάθε $\ell\in\mathbb{N}$, έπεται ότι: $z_n \in E_{\ell_n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Η $(\ell_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Ας υποθέσουμε ότι είναι φραγμένη, δηλ. ότι $\ell_n \le \mu$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Τότε: $z_n\in E_\mu$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Επειδή το E_μ είναι κλειστό (υπόχωρος πεπ. διάστασης) και $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} x$, έπεται ότι: $x\in E_\mu$, άτοπο. Άρα η $(\ell_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν είναι φραγμένη. Επειδή η $(\ell_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα και μη φραγμένη, έπεται: $\ell_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Έστω $x^*_{\ell_n}\in E_{\ell_n}$ η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον E_{ℓ_n} για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε: $0\le \|x-x^*_{\ell_n}\|\le \|x-z_n\|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\overset{\boxed{1}}{\Rightarrow} \lim_{n\to+\infty}\|x-x^*_{\ell_n}\|=0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\|x^*_{\ell_n}\|=\|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\|^2=\lim_{n\to+\infty}\|x^*_{\ell_n}\|^2=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{\ell_n}|(x,e_k)|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2.$$

Έτσι, και στις δύο περιπτώσεις, καταλήγουμε στην ισότητα Parseval.

15.13

$(\beta)\Rightarrow(\gamma)$.

Υποθέτουμε ότι: $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2$ $\forall x\in V$.

Έστω $v\in V$ και $v^*_m\in E_m$ η βέλτιστη προσέγγιση του v από τον E_m για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Τότε: $v^*_m=\sum_{k=1}^{m}(v,e_k)e_k$ $\forall m\in\mathbb{N}$ και

$\forall m\in\mathbb{N}$:

$$\|v-v^*_m\|^2=(v-v^*_m,v-v^*_m)=(v-v^*_m,v)-\underbrace{(v-v^*_m,\overset{\in E_m}{v^*_m})}_{=0}$$

$$=(v,v)-(v^*_m,v)$$

$$=\|v\|^2-\left(\sum_{k=1}^{m}(v,e_k)e_k,v\right)$$

$$=\|v\|^2-\sum_{k=1}^{m}(v,e_k)(e_k,v)$$

$$=\|v\|^2-\sum_{k=1}^{m}(v,e_k)\overline{(v,e_k)}=\|v\|^2-\sum_{k=1}^{m}|(v,e_k)|^2\xrightarrow[m\to+\infty]{}0.$$

Άρα: $\lim_{m\to+\infty}\|v-v^*_m\|=0$. Έτσι εξασφαλίσαμε ότι ισχύει το (γ).

15.14

$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$. Η (γ) εξασφαλίζει ότι: το $\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$ είναι πυκνό. Άρα το $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα. ∎

Παραδείγματα:

1. $X=(\mathbb{R}, C([-1,1],\mathbb{R}),+,\cdot,(\cdot,\cdot))$ με: $(f,g)=\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt \quad \forall f,g \in C([-1,1];\mathbb{R})$

Τα ορθοκανονικοποιημένα πολυώνυμα Legendre $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον X

2. $X=(\mathbb{R}, C_{per}[-\pi,\pi],+,\cdot,(\cdot,\cdot))$ με $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt \quad \forall f,g \in C_{per}[-\pi,\pi]$

και $C_{per}[-\pi,\pi]=\{g \in C([-\pi,\pi];\mathbb{R}): g(\pi)=g(-\pi)\}$. Για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$

ορίζουμε: $\varphi_0(t):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_{2k}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(kt)$ και $\varphi_{2k-1}(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(kt)$ για κάθε $k\geq 1$.

15.15

Το σύνολο $\Phi=\left\{\varphi_0, (\varphi_{2k})_{k=1}^{\infty}, (\varphi_{2k-1})_{k=1}^{\infty}\right\}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον X.