17. 0

Διάλεξη 17

(βίντεο)

ΜΕΜ 955 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

17.1

Νόρμες και γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης

Ορισμός: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathbb{X}=(F,V,+,\cdot)$ ένας γραμμικός χώρος και $\|\cdot\|_A$, $\|\cdot\|_B$ νόρμες που ορίζονται στο $\mathbb{X}$. Λέμε ότι η $\|\cdot\|_B$ είναι ισχυρότερη της νόρμας $\|\cdot\|_A$ όταν υπάρχει $c>0$ τ.ω. $\|v\|_A \leq c\|v\|_B$ $\forall v\in V$. Λέμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_A$ και $\|\cdot\|_B$ είναι ισοδύναμες όταν υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2>0$ τ.ω. $c_1\|v\|_A \leq \|v\|_B \leq c_2\|v\|_A$ $\forall v\in V$. □

Σημείωση 1. Η ιδιότητα ότι: "υπάρχει $c>0$ τ.ω. $\|v\|_A\leq c\|v\|_B$ για κάθε $v\in V$" ισοδυναμεί με: "$\sup\left\{\frac{\|v\|_A}{\|v\|_B} : v\in V \text{ με } v\neq 0\right\} \boxed{\leq} c$" και η σταθερά είναι βέλτιστη όταν η τελευταία σχέση ισχύει ως ισότητα. Η απόδειξη ότι η c είναι βέλτιστη μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ο ένας είναι να βρούμε $z\in V$ με: $z\neq 0$ και $\frac{\|z\|_A}{\|z\|_B}=c$ και ο άλλος είναι να βρούμε ακολουθία $(z_n)_{n=1}^{\infty}\subset V$ με μη μηδενικά στοιχεία τ.ω. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\|z_n\|_A}{\|z_n\|_B}=c$. □

17.2

Σημείωση 2: Έστω ότι η νόρμα $\|\cdot\|_B$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|_A$, $v \in V$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$. Τότε:

$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_B} v \implies v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_A} v .$$

Όταν οι νόρμες $\|\cdot\|_A$ και $\|\cdot\|_B$ είναι ισοδύναμες, $v \in V$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subset V$.

Τότε: $$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_B} v \iff v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_A} v . \quad \square$$

Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 1: Έστω ο γραμμικός χώρος $X = (\mathbb{C}, \mathbb{C}^m, +, \cdot)$ και $p > 1$.

Στη συνέχεια ορίζουμε νόρμες: $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_p$ στο X ως εξής:

$$\|z\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |z_j| \text{ και } \|z\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j|^p\right)^{1/p} \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}^m .$$

Θα δείξουμε ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_p$ είναι ισοδύναμες

17.3

Έστω $z \in \mathbb{C}^m$. Τότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder παραδιάστασα (βλ. Άσκηση 1.1) έχουμε:

$$\|z\|_1 = \sum_{j=1}^{m} 1 \cdot |z_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{m} 1^q\right)^{1/q} \left(\sum_{j=1}^{m} |z_j|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq m^{1/q} \|z\|_p \quad , \text{ όπου: } q>0 \text{ τ.ω. } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Έτσι: $$\|z\|_1 \leq m^{\frac{p-1}{p}} \|z\|_p \, , \forall z \in \mathbb{C}^m. \quad \boxed{1}$$

Για να δείξουμε ότι η σταθερά είναι βέλτιστη διαλέγουμε $z \in \mathbb{C}^m$ με: $z_j = 1$ για $j=1,\dots,m$. Τότε έχουμε: $\|z\|_1 = m$, $\|z\|_p = m^{1/p}$ και $m^{\frac{p-1}{p}} \cdot \|z\|_p = m^{\frac{p-1}{p}} m^{1/p} = m = \|z\|_1$, δηλ. ισχύει η ισότητα στην ανισότητα που αποδείξαμε πιο πάνω.

17.4.

Έστω $w \in \mathbb{C}^m$. Τότε:

$$\|w\|_p = \left(\sum_{j=1}^{m} |w_j|^p \right)^{1/p} \leq \left[m \cdot \max_{1 \leq j \leq m} |w_j|^p \right]^{1/p} = m^{\frac{1}{p}} \left(\max_{1 \leq j \leq m} |w_j|^p \right)^{1/p}$$

$$= m^{1/p} \max_{1 \leq j \leq m} |w_j| \leq m^{1/p} \sum_{j=1}^{m} |w_j| = m^{1/p} \cdot \|w\|_1 .$$

Έτσι: $\|w\|_p \leq m^{1/p} \|w\|_1 \quad \forall w \in \mathbb{C}^m$ $\boxed{2}$ Σ' αυτό το σημείο μαζί με την $\boxed{1}$ έχουμε εξασφαλίσει ότι οι $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες. Μένει το ερώτημα αν η σταθερά $m^{1/p}$ στην παραπάνω ανισότητα είναι βέλτιστη. Όταν η σταθερά είναι βέλτιστη, τότε ακολουθώντας μία από τις τεχνικές που περιγράψαμε στη Σημείωση 1 μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε. Όταν δεν είναι βέλτιστη, πρέπει να βρούμε κάποια ένδειξη γι' αυτό και στη συνέχεια με νέα απόδειξη να βρούμε νέα καλύτερη σταθερά, κάτι το οποίο δεν είναι σαφές πώς μπορεί να γίνει.

17.5

Μια ένδειξη για το ότι η σταθερά $m^{\frac{1}{p}}$ δεν είναι βέλτιστη στηρίζεται στην εξής παρατήρηση: $\|w\|_p^p \le m\,\|w\|_1 \ \forall m \in \mathbb{C}^m, (\forall p>1)$.

Παίρνοντας $\lim\limits_{p\to 1^+}$ και στα δύο μέλη της ανισότητας έχουμε:

$\lim\limits_{p\to 1^+} \|w\|_p^p \le m\,\|w\|_1 \Rightarrow \|w\|_1 \le m\,\|w\|_1$. (Αντίθετα από την $\boxed{1}$ όπου παίρνουμε $\lim\limits_{p\to 1^+} \|w\|_1^p \le \lim\limits_{p\to 1^+}\left[m^{p-1}\cdot \|w\|_p^p\right] \Rightarrow \|w\|_1 \le \|w\|_1$.) Η παρουσία σταθεράς $m \neq 1$ είναι μια ένδειξη ότι η σταθερά $m^{\frac{1}{p}}$ δεν είναι βέλτιστη. Ας κάνουμε λίγο διαφορετικά την απόδειξη του ότι η $\|\cdot\|_1$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|_p$.

Έστω: $w \in \mathbb{C}^m$. Τότε: $\|w\|_p = \left[\sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|\cdot|w_j|^{p-1}\right]^{\frac{1}{p}}$

$\le \max\limits_{1\le j\le m} |w_j|^{\frac{p-1}{p}} \left[\sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|\right]^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum\limits_{j=1}^{m} |w_j|\right)^{\frac{1}{p}} = \sum\limits_{j=1}^{m} |w_j| = \|w\|_1$.

17.6

Έτσι δείξαμε ότι: $\|w\|_p \leq \|w\|_1 \ \forall w \in \mathbb{C}_1^p$. Η ισότητα ισχύει προφανώς για $w \in \mathbb{C}_1^m$ με: $w_j = \begin{cases} 1 & j=1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases}$ για $j=1,\dots,m$. Έτσι η σταθερά 1 στην παραπάνω ανισότητα είναι βέλτιστη. ■

Παράδειγμα 2: Έστω ο γραμμικός χώρος $X = (\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$.
Ορίζουμε στον X τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ ως εξής:

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \quad \text{και} \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

για κάθε $f \in C([0,1];\mathbb{R})$.

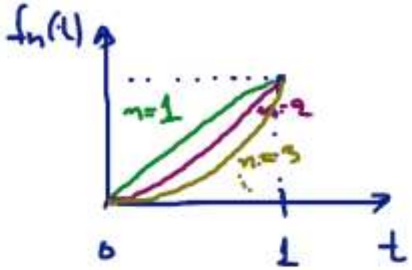
Παρατηρούμε ότι: $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty\,dt = \|f\|_\infty$ για κάθε $f \in C([0,1];\mathbb{R})$. Η ισότητα λαμβάνεται π.χ. όταν $f(t) = 1 \ \forall t \in [0,1]$.

Επομένως η $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|_1$. Όμως οι νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ δεν είναι ισοδύναμες, δηλ.

Δεν υπάρχει σταθερά $c>0$ τ.ω. $\|f\|_\infty \leq c\|f\|_1$ για κάθε $f \in C([0,1],\mathbb{R})$. **17.7**

Για να εξασφαλίσουμε το συμπέρασμα αυτό αρκεί να βρούμε ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1];\mathbb{R})$ με μη μηδενικά στοιχεία τ.ω. $\dfrac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Η ιδέα είναι να επιλέξουμε $f_n \geq 0$ τέτοια ώστε να έχει σταθερή μέγιστη τιμή 1 (οπότε σταθεροποιείται ο αριθμητής) και το ολοκλήρωμά της να τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$. Μια τέτοια επιλογή είναι: $f_n(t) = t^n \ \forall t \in [0,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έτσι:

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_1} = \frac{1}{\int_0^1 t^n \, dt} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}} = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$



17.8

Στα προηγούμενα παραδείγματα η διαφορά εντοπίζεται στη διάσταση του γραμμικού χώρου. Στο Παράδειγμα 1 ο $(\mathbb{C},\mathbb{C}^m,+,\cdot)$ έχει διάσταση m και στο Παράδειγμα 2 ο $(\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ είναι απειροδιάστατος. Θα δείξουμε αργότερα ότι όλες οι νόρμες σε ένα χώρο πεπερασμένης διάστασης είναι ισοδύναμες, όπως συνέβει στο Παράδειγμα 1. Όταν ο γραμμικός χώρος είναι απειροδιάστατος για τη σχέση ανάμεσα σε δύο νόρμες ισχύει ότι μπορεί να αποδειχθεί. Στο Παράδειγμα 2 δείξαμε ότι όταν η διάσταση είναι άπειρη δύο νόρμες δεν είναι απαραίτητα ισοδύναμες και δείξαμε ότι μπορεί μία νόρμα να είναι ισχυρότερη μιας άλλης. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι σε ένα απειροδιάστατο γραμμικό χώρο μπορούμε να έχουμε δύο νόρμες για τις οποίες καμμία δεν είναι ισχυρότερη της άλλης.

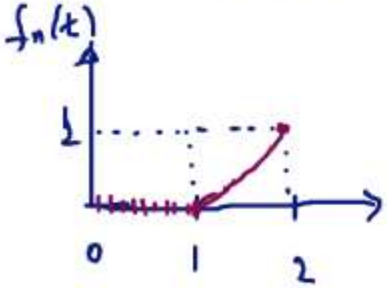
17.9

Παράδειγμα 3: Έστω $X=(\mathbb{R}, C([0,2];\mathbb{R}), +, \cdot)$ και νόρμες $\|\cdot\|, \|\cdot\|_2$ με:

$$\|f\| := \max_{[0,1]}|f| + \int_1^2 |f(t)|\,dt \quad \text{και} \quad \|f\|_2 := \left[\int_0^2 |f(t)|^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

για κάθε $f \in C([0,2];\mathbb{R})$.

Έστω: $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset C([0,2];\mathbb{R})$ με: $f_n(t)=\begin{cases} 0, & t\in[0,1) \\ (t-1)^n, & t\in[1,2] \end{cases}$ $\forall t\in[0,2], \forall n\in\mathbb{N}$.



Έτσι: $\|f_n\|_2 = \left[\int_1^2 (t-1)^{2n}\,dt\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{(t-1)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{t=1}^{t=2}\right]^{\frac{1}{2}} = (2n+1)^{-\frac{1}{2}}$

και

$\|f_n\| = \int_1^2 (t-1)^n\,dt = \frac{(t-1)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=1}^{t=2} = \frac{1}{n+1}$. Επομένως,

έχουμε: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)^{-\frac{1}{2}}}{(n+1)^{-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{\sqrt{n}\sqrt{2+\frac{1}{n}}} = +\infty$

Έτσι η $\|\cdot\|$ δεν είναι ισχυρότερη από $\|\cdot\|_2$.

$\boxed{17.10}$

Έστω $(g_n)_{n=1}^{\infty} \subset C([0,2];\mathbb{R})$ με: $g_n(t) = \begin{cases} (1-t)^n, & t\in[0,1] \\ 0, & t\in[1,2] \end{cases}$ $\forall t\in[0,2], \forall n\in\mathbb{N}$.

Έτσι $\|g_n\| = \max\limits_{t\in[0,1]} (1-t)^n = 1$ και $\|g_n\|_2 = \left(\int_0^1 (1-t)^{2n}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left[-\frac{(1-t)^{2n+1}}{2n+1}\Big|_{t=0}^{t=1}\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Έτσι: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\|g_n\|}{\|g_n\|_2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$. Επομένως η $\|\cdot\|_2$ δεν είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|$. ■

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την ισοδυναμία δύο νορμών σε ένα γραμμικό χώρο πεπερασμένης διάστασης ακολουθώντας τα βήματα της Άσκησης 2.8.

Θεώρημα: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $\mathfrak{X}=(F,V,+,\cdot)$ ένας γραμμικός χώρος. $\boxed{17.11}$
Αν ο $\mathfrak{X}$ έχει πεπερασμένη διάσταση, τότε όλες οι νόρμες που ορίζονται στον $\mathfrak{X}$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη

Α: Έστω: $m=\dim(\mathfrak{X})>0$, και $\mathcal{B}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ μία βάση του $\mathfrak{X}$.

Στη συνέχεια ορίζουμε $\Phi: F^m \to V$ με: $\Phi(\lambda)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j \ \ \forall \lambda\in F^m$.

Έστω $\lambda,\mu\in F^m$ τ.ω. $\Phi(\lambda)=\Phi(\mu)$. Τότε: $\sum_{j=1}^{m}(\lambda_j-\mu_j)\varphi_j=0$ που συνεπάγεται $\lambda_j=\mu_j$ για $j=1,\dots,m$, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των $(\varphi_j)_{j=1}^{m}$. Άρα: η Φ είναι 1-1. Έστω: $v\in V$. Επειδή $\mathcal{B}$ είναι μία βάση, έπεται ότι υπάρχουν $(\lambda_j)_{j=1}^{m}\subset F$ τ.ω. $v=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\varphi_j$. Θέτοντας $\tilde{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)^T\in F^m$, έχουμε $\Phi(\tilde{\lambda})=v$. Έτσι: η Φ είναι επί. Συνεπώς η Φ είναι αντιστρέψιμη.

17.12

B. Ορίζουμε: $\hat{\nu}: V \longrightarrow [0,+\infty)$ με $\hat{\nu}(x) := \|\Phi^{-1}(x)\|_1$ για κάθε $x \in V$, όπου: $\|\lambda\|_1 = \sum_{j=1}^{m} |\lambda_j|$ για κάθε $\lambda \in F^m$. Θα δείξουμε ότι η $\hat{\nu}$ είναι μια νόρμα στον V

I. Όταν $x=0$ τότε: $\Phi^{-1}(x)=0$ και επομένως $\hat{\nu}(0)=0$! Έστω ότι για κάποιο $x \in V$ ισχύει: $\hat{\nu}(x)=0$. Τότε: $\Phi^{-1}(x)=0 \Rightarrow \Phi(\Phi^{-1}(x)) = \Phi(0)$ $\Rightarrow x = \Phi(0) \Rightarrow x=0$.

II. Έστω $x, y \in V$, $\lambda = \Phi^{-1}(x)$ και $\mu = \Phi^{-1}(y)$. Τότε: $\Phi(\lambda+\mu) = x+y$ και $\hat{\nu}(x+y) = \|\Phi^{-1}(x+y)\|_1 = \|\lambda+\mu\|_1 \leq \|\lambda\|_1 + \|\mu\|_1 = \|\Phi^{-1}(x)\|_1 + \|\Phi^{-1}(y)\|_1 = \hat{\nu}(x) + \hat{\nu}(y)$.

III. Έστω $x \in V$, $\alpha \in F$ και $\lambda = \Phi^{-1}(x)$. Τότε: $\Phi(\alpha\lambda) = \alpha x$ και $\hat{\nu}(\alpha x) = \|\Phi^{-1}(\alpha x)\|_1 = \|\alpha\lambda\|_1 = |\alpha| \, \|\lambda\|_1 = |\alpha| \, \hat{\nu}(x)$.

17.13

Γ. Έστω $S=\{x\in V : \hat{\nu}(x)=1\}$. Θα δείξουμε ότι το S είναι κλειστό και φραγμένο στον $\hat{X}=(F,V,+,\cdot,\hat{\nu})$. Το S είναι φραγμένο στον $\hat{X}$ καθώς $\hat{\nu}(x)=1$ $\forall x\in S$. Έστω $(w_n)_{n=1}^{\infty}\subset S$ και $w\in V$ τ.ω. $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\hat{\nu}} w$.

Τότε: $0\leq|\hat{\nu}(w_n)-\hat{\nu}(w)|\leq\hat{\nu}(w_n-w)$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Άρα: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\hat{\nu}(w_n)-\hat{\nu}(w)\right]=0$

$\Rightarrow 1-\hat{\nu}(w)=0 \Rightarrow \hat{\nu}(w)=1 \Rightarrow w\in S$. Επομένως το S είναι κλειστό.

Επειδή ο $X=(F,V,+,\cdot)$ έχει πεπερασμένη διάσταση το S είναι συμπαγές στον $\hat{X}$.

Δ. Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον X και $T:\hat{X}\to(\mathbb{R},\mathbb{R},+,\cdot,|\cdot|)$ με: $T(x)=\|x\|$ για κάθε $x\in V$. Τότε, για κάθε $x,z\in V$, έχουμε:

$$|T(x)-T(z)|=\big|\|x\|-\|z\|\big|\leq\|x-z\|=\Big\|\sum_{j=1}^{m}\big((\Phi^{-1}(x))_j-(\Phi^{-1}(z))_j\big)\varphi_j\Big\|$$

$$\leq\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|\cdot\big|(\Phi^{-1}(x))_j-(\Phi^{-1}(z))_j\big|\leq\max_{1\leq j\leq m}\|\varphi_j\|\cdot\|\Phi^{-1}(x)-\Phi^{-1}(z)\|_1$$

$$=\max_{1\leq j\leq m}\|\varphi_j\|\;\|\Phi^{-1}(x-z)\|_1 \doteq \max_{1\leq j\leq m}\|\varphi_j\|\cdot\hat{\nu}(x-z).$$

17.14

Δηλ. $|T(x)-T(z)| \leq \underbrace{\max_{1\leq j\leq n} \|\varphi_j\|}_{\widetilde{C}>0} \hat{V}(x-z) \ \forall x,z \in V$.

Άρα η T είναι συνεχής. Επειδή το S είναι συμπαγές υπάρχουν $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $C_2 = \max_{x\in S} T(x)$ και $C_1 = \min_{x\in S} T(x)$. Επειδή $\varphi_1 \neq 0$,

έπεται ότι: $\frac{\varphi_1}{\hat{V}(\varphi_1)} \in S$ και $C_2 = \max_{x\in S} \|x\| \geq \left\| \frac{\varphi_1}{\hat{V}(\varphi_1)} \right\| = \frac{\|\varphi_1\|}{\hat{V}(\varphi_1)} > 0$.

Επειδή $T(x) \geq 0 \ \forall x \in S$, έπεται ότι: $C_1 \geq 0$. Ο σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε ότι $C_1 > 0$. Αυτό θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Έστω: $C_1 = 0$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset S$ τ.ω. $\lim_{n\to+\infty} T(x_n) = 0$. Επειδή το S είναι συμπαγές υπάρχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στον $\hat{X}$ σε κάποιο $x \in S$, δηλ. $\lim_{n\to+\infty} \hat{\nu}(x_{k_n}-x)=0$. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι $\hat{\nu}(x)=1$ επειδή $x\in S$. 17.15

Ακόμα παρατηρούμε ότι:

$$\|z\| = \left\|\sum_{j=1}^{m} (\Phi^{-1}(z))_j\, \varphi_j\right\| \le \max_{1\le j\le m} \|\varphi_j\| \cdot \sum_{j=1}^{m} |(\Phi^{-1}(z))_j|$$

$$\le \max_{1\le j\le m} \|\varphi_j\| \cdot \hat{\nu}(z) \quad \forall z\in V,$$

που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $\hat{\nu}$ είναι ισχυρότερη του $\|\cdot\|$, και επομένως: $\lim_{n\to+\infty} \|x_{k_n}-x\|=0$. Έτσι έχουμε: $0\le\|x\|\le\|x_{k_n}-x\|+\|x_{k_n}\|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 0\le\|x\|\le T(x_{k_n})+\|x_{k_n}-x\|$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow 0\le\|x\|\le \lim_{n\to+\infty}\left(T(x_{k_n})+\|x_{k_n}-x\|\right)=0$

$\Rightarrow x=0 \Rightarrow \hat{\nu}(x)=0$. Άτοπο. Έτσι: $c_1>0$.

17.16

Επομένως υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ τ.ω. $\boxed{c_1 \leq T(x) \leq c_2 \quad \forall x \in S}$

Ε. Άρα: $c_1 \leq T\left(\frac{x}{\nu(x)}\right) \leq c_2 \quad \forall \underset{x \neq 0}{x \in V}$

$\Rightarrow c_1 \nu(x) \leq \|x\| \leq c_2 \nu(x) \quad \forall x \in V.$

Άρα οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $(F, V, +, \cdot)$ είναι ισοδύναμη με τη νόρμα ν. Έτσι αν έχουμε τυχαίες νόρμες $\|\cdot\|_A, \|\cdot\|_B$ στον $(F, V, +, \cdot)$, τότε: $C_1^A \|x\|_A \leq \nu(x) \leq C_2^A \|x\|_A$ και $C_1^B \|x\|_B \leq \nu(x) \leq C_2^B \|x\|_B$ για κάθε $x \in V$ και για κάποια $C_1^A, C_2^A, C_1^B, C_2^B > 0$. Έτσι: $\frac{C_1^A}{C_2^B} \|x\|_A \leq \|x\|_B \leq \frac{C_2^A}{C_1^B} \|x\|_A \quad \forall x \in V,$ δηλ. οι $\|\cdot\|_A$ και $\|\cdot\|_B$ είναι ισοδύναμες. ∎

17.17

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Και Y υπόχωρος του V. Αν ο Y είναι πεπερασμένης διάστασης, τότε ο Y είναι κλειστό υποσύνολο του V.

Απόδειξη: Έστω ότι $\dim(Y) = M > 0$, $\mathcal{B} = (q_j)_{j=1}^{M}$ μία βάση του Y, $\Phi : F^M \to Y$ με: $\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j q_j$ $\forall \lambda \in F^M$ η οποία είναι 1-1 και επί, $\hat{V}(x) = \|\Phi^{-1}(x)\|_1$ για κάθε $x \in Y$ η οποία είναι νόρμα στον $(F, Y, +, \cdot)$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset Y$ για την οποία υπάρχει $y \in V$ τ.ω. $\lim_{n \to \infty} \|y_n - y\| = 0$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $y \in Y$.

Επειδή ο Y έχει πεπερασμένη διάσταση οι $\hat{V}$ και $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμες στον Y δηλ. υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ τ.ω. $c_1\|x\| \le \hat{V}(x) \le c_2\|x\|$ $\forall x \in Y$.

17.18

Έστω $\mu^n = \Phi^{-1}(y_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $n, k \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$\mu^n - \mu^k = \Phi^{-1}(y_n - y_k)$ και $\|\mu^n - \mu^k\|_1 = \|\Phi^{-1}(y_n - y_k)\|_1 = \hat{\nu}(y_n - y_k)$

$\leq c_2 \|y_n - y_k\| \leq c_2 \left[\|y_n - y\| + \|y - y_k\|\right]$. Άρα:

$$|\mu_j^n - \mu_j^k| \leq c_2 \left(\|y_n - y\| + \|y - y_k\|\right) \quad \forall n, k \in \mathbb{N},\ j = 1, \dots, M.$$

Άρα, για $j = 1, \dots, M$, η ακολουθία $(\mu_j^n)_{n=1}^{\infty}$ είναι Cauchy και επομένως συγκλίνει. Έστω $\mu_j = \lim_{n\to+\infty} \mu_j^n$, για $j = 1, \dots, M$. Επιπλέον, ορίζουμε: $z \in Y$ με: $z = \sum_{j=1}^{M} \mu_j q_j$, και θέτουμε $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_M)^T$. Έτσι:

$$\|y_n - z\| \leq \frac{1}{c_1} \hat{\nu}(y_n - z) = \frac{1}{c_1} \|\Phi^{-1}(y_n - z)\|_1 = \frac{1}{c_1} \|\mu^n - \mu\|_1 = \frac{1}{c_1} \sum_{j=1}^{M} |\mu_j^n - \mu_j|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα: $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - z\| = 0$, και αναγκαστικά $y = z \in Y$ ∎

μοναδ. ορίου.