18.0

Διάλεξη 18

(βίντεο)

ΜΕΜ 955 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

Ομοιόμορφες προσεγγίσεις

18.1

Θα ασχοληθούμε πρώτα με το

Θεώρημα Weierstrass:

Το σύνολο $\mathbb{P}[a,b]$ είναι πυκνό στον $(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$. □

Σημείωση 1: Αρκεί να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα για $[a,b]=[0,1]$.

Έστω ότι το Θεώρημα Weierstrass ισχύει για $[a,b]=[0,1]$! Έστω: $g\in C([\gamma,\delta];\mathbb{R})$. Τότε ορίζουμε: $f\in C([0,1];\mathbb{R})$ με: $f(t)=g(\gamma+t(\delta-\gamma))$ για κάθε $t\in[0,1]$. Επομένως υπάρχει $(f_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{P}[0,1]$ τ.ω. $\lim\limits_{n\to+\infty}\|f-f_n\|_\infty=0$. Επιπλέον ορίζουμε $(g_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{P}[\gamma,\delta]$ με: $g_n(x)=f_n\left(\frac{x-\gamma}{\delta-\gamma}\right)$ για κάθε $x\in[\gamma,\delta]$ και $n\in\mathbb{N}$.

Επομένως:

$$\|g-g_n\|_\infty = \max_{x\in[\gamma,\delta]} |g(x)-g_n(x)| = \max_{t\in[0,1]} \left|g(\gamma+t(\delta-\gamma))-g_n(\gamma+t(\delta-\gamma))\right|$$

$$= \max_{t\in[0,1]} \left|f(t)-f_n\left(\frac{\gamma+t(\delta-\gamma)-\gamma}{\delta-\gamma}\right)\right|$$

$$= \max_{t\in[0,1]} |f(t)-f_n(t)| = \|f-f_n\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

<u>Σημείωση 2</u> Υπάρχουν αρκετές αποδείξεις του

(α). Weierstrass. Ο Weierstrass έδωσε μη κατασκευαστικές αποδείξεις στο θεώρημα αυτό, δηλ. δεν υποδεικνύει συγκεκριμένη ακολουθία πολυωνύμων η οποία προσεγγίζει μια συνεχή συνάρτηση f. Στη συνέχεια θα δούμε την απόδειξη του Bernstein (1912) η οποία είναι κατασκευαστική.

18.3

Απόδειξη Bernstein:

A: Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε απεικόνιση $B_n : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^n[0,1]$ ως εξής:

$$(B_n g)(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} g\left(\frac{\ell}{n}\right) t^{\ell} (1-t)^{n-\ell} \quad \forall t \in [0,1], \forall g \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

Το $B_n g$ λέμε ότι είναι το πολυώνυμο Bernstein βαθμού n, το οποίο αντιστοιχεί στην συνάρτηση g. Το σύνολο $\mathcal{B}_n := \{\binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell} : \ell = 0, \dots, n\}$ καλείται βάση Berstein βαθμού n. Θα αποδείξουμε ότι:
$\lim_{n \to +\infty} \|f - B_n f\|_\infty = 0$ για κάθε $f \in C([0,1];\mathbb{R})$.

"σφάλμα"

B: Έστω $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ και $E_n = f - B_n f \in C([0,1];\mathbb{R})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

Χρησιμοποιώντας το διώνυμο του Νεύτωνα έπεται ότι:

$$f(t) = [(1-t)+t]\, f(t) = [(1-t)+t]^n f(t) = f(t) \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{\ell}$$

για κάθε $t \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Επομένως : $E_n(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(f(t) - f(\ell/n)\right) t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ 18.4

και έτσι:

$$|E_n(t)| = \left| \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(f(t) - f(\ell/n)\right) t^\ell (1-t)^{n-\ell} \right|$$

$$\leq \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left|f(t) - f(\ell/n)\right| t^\ell (1-t)^{n-\ell}, \quad \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Γ. Επειδή η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0,1]$, έπεται ότι θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0,1]$. Άρα για δοθέν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $|f(s) - f(\tau)| < \varepsilon/3$ όταν $s, \tau \in [0,1]$ και $|s - \tau| < \delta$. $\boxed{1}$

Δ. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε χωρίζουμε το σύνολο δεικτών $I_n = \{0, \dots, n\}$ στα υποσύνολα: $I_n^1(t) := \{\ell \in I_n : |t - \ell/n| < \delta\}$ και $I_n^2(t) = \{\ell \in I_n : |t - \ell/n| \geq \delta\}$ $\boxed{3}$ για κάθε $t \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}_0$ $\boxed{2}$

18.5

Έτσι:

$$|E_n(t)| \leq K_n(t) + \Lambda_n(t) \quad \forall t\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}_0, \qquad \boxed{4}$$

όπου: $K_n(t) := \sum_{\ell\in I_n^1(t)} \binom{n}{\ell} |f(t) - f(\ell/n)|\, t^\ell (1-t)^{n-\ell}$

και $\Lambda_n(t) := \sum_{\ell\in I_n^2(t)} \binom{n}{\ell} |f(t) - f(\ell/n)|\, t^\ell (1-t)^{n-\ell}.$

Σύμφωνα με τον ορισμό του $I_n^1(t)$ $\boxed{2}$ και την $\boxed{3}$, έπεται ότι:

$$\forall n\in\mathbb{N}_0, \forall t\in[0,1]: \quad K_n(t) = \sum_{\ell\in I_n^1(t)} \binom{n}{\ell} \varepsilon/3\, t^\ell (1-t)^{n-\ell} \leq \varepsilon/3 \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}}_{=1} = \varepsilon/3$$

δηλ. $\boxed{5}$ $K_n(t) \leq \varepsilon/3 \quad \forall t\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}_0$

$\boxed{18.6}$

Με βάση τον ορισμό του $I_n^2(t)$ $\boxed{3}$, έπεται:

$\forall n\in\mathbb{N}_0$, $\forall t\in[0,1]$: $$\Delta_n(t) \le \sum_{\ell\in I_n^2(t)} \binom{n}{\ell}\left(|f(t)|+|f(\ell/n)|\right) t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$\le 2\|f\|_\infty \sum_{\ell\in I_n^2(t)} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$\le 2\|f\|_\infty \sum_{\ell\in I_n^2(t)} \binom{n}{\ell} \left(\frac{t-\ell/n}{\delta}\right)^2 t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

όταν $\ell\in I_n^2(t)$ τότε: $|t-\ell/n|\ge\delta \Rightarrow \dfrac{|t-\ell/n|}{\delta}\ge 1$

$$\Rightarrow \frac{(t-\ell/n)^2}{\delta^2}\ge 1$$

$$\le \frac{2}{\delta^2}\|f\|_\infty \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (t-\ell/n)^2 t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

18.7

$$\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(t^2 + \frac{\ell^2}{n^2} - 2\frac{t\ell}{n}\right) t^\ell (1-t)^{n-\ell},$$

δηλ.

$$\Pi_n(t) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \sum_{j=1}^{3} \Lambda^j_n(t) \qquad \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

όπου: $\Lambda^1_n(t) := \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^2 t^\ell (1-t)^{n-\ell}$,

$$\Lambda^2_n(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \frac{\ell^2}{n^2} t^\ell (1-t)^{n-\ell},$$

και $\Lambda^3_n(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(-2 \cdot \frac{t\ell}{n}\right) t^\ell (1-t)^{n-\ell}$.

Για κάθε $n \geq 2$ και $t \in [0,1]$, έχουμε τα ακόλουθα: $\boxed{18.8}$

$$\Omega^1_n(t) = t^2 \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}}_{=1} = t^2,$$

$$\Omega^2_n(t) = \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \ell^2 t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \ell^2 t^\ell (1-t)^{n-\ell} = \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!\,\ell^2}{\ell!\,(n-\ell)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(n-1)!\,\ell}{(\ell-1)!\,(n-\ell)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!\,(\ell+1)}{\ell!\,(n-\ell-1)!} t^{\ell+1} (1-t)^{n-\ell-1}$$

$$= \frac{t}{n} \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} t^\ell (1-t)^{(n-1)-\ell}}_{=1} + \frac{t}{n} \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!\,(n-\ell-1)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell-1}$$

$$= t/n + \frac{t(n-1)}{n} \sum_{\ell=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{\ell!\,(n-2-\ell)} t^{\ell+1} (1-t)^{n-2-\ell}$$

18.9

$$= \frac{t}{n} + \frac{t^2(n-1)}{n} \sum_{\ell=0}^{n-2} \underbrace{\binom{n-2}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-2-\ell}}_{=1}$$

$$= \frac{t}{n} + t^2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

Και

$$\Omega_n^3(t) = -\frac{2t}{n} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \ell\, t^\ell (1-t)^{n-\ell} = -\frac{2t}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \ell\, t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$= -\frac{2t}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!\,\ell}{\ell!\,(n-\ell)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell} = -2t \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!\,(n-\ell)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$= -2t \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!\,(n-1-\ell)!} t^{\ell+1} (1-t)^{n-1-\ell} =$$

$$= -2t^2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{\binom{n-1}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-1-\ell}}_{=1} = -2t^2 .$$

18.10

Έτσι:

$$\Lambda_n(t) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\left(t^2 + \frac{t}{n} + t^2\left(1-\frac{1}{n}\right) - 2t^2\right)$$

$$\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\left(t/n - t^2/n\right) = \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\,\frac{t(1-t)}{n} \quad \forall n \geq 2 \quad \forall t \in [0,1].$$

Έτσι:

$$E_n(t) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2}\,\frac{t(1-t)}{n} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{\delta^2}\|f\|_\infty \frac{1}{n}\max_{t\in[0,1]} t(1-t)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{\delta^2}\,\frac{1}{4n}\|f\|_\infty = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2} \quad , \forall t \in [0,1], \forall n \geq 2.$$

Επομένως όταν $n \geq n_0 = \left[\frac{\|f\|_\infty}{\varepsilon\delta^2}\right] + 1$, τότε:

$$E_n(t) \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon \quad \forall t \in [0,1] \Rightarrow \|E_n\|_\infty < \varepsilon.$$

$\blacksquare$

18.11

Θα αποδείξουμε μια «τάξη σύγκλισης» των πολυωνύμων Bernstein όταν η f είναι Lipschitz.

<u>Πρόταση:</u> Έστω $Lip([0,1];\mathbb{R}) = \{ f \in C([0,1];\mathbb{R}) : f \text{ Lipschitz στο } [0,1] \}$.

Υπάρχει $c>0$ τ.ω.

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{c}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Απόδειξη:</u> Είδαμε στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος ότι:

$$E(t) := f(t) - B_n f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(f(t) - f(\tfrac{\ell}{n})\right) t^\ell (1-t)^{n-\ell} \quad \forall t \in [0,1].$$

Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$\forall t \in [0,1]: \ |E(t)| \leq \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} |f(t) - f(\tfrac{\ell}{n})| \, t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$$\leq L \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} |t - \tfrac{\ell}{n}| \, t^\ell (1-t)^{n-\ell}$$

$\boxed{18.12}$

$$\leq L \sum_{\ell=0}^{n} \left[\binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\right]^{1/2} \left|t-\frac{\ell}{n}\right| \left[\binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\right]^{1/2}$$

$$\underset{C-S}{\leq} L \Bigg[\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}}_{=1}\Bigg]^{1/2} \left[\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(t-\ell/n\right)^{2} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\right]^{1/2}$$

$$\leq L \Bigg[\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left|t-\ell/n\right|^{2} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}}_{\frac{t(1-t)}{n}}\Bigg]^{1/2} \leq L \frac{[t(1-t)]^{1/2}}{\sqrt{n}}.$$

Έτσι: $\|\vec{E}^n\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |\vec{E}^n(t)| \leq \frac{L}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)^{1/2} = \frac{L}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}$

$$= \frac{L}{2\sqrt{n}}.$$

$\boxtimes$

18.13

Παρατηρήσεις:

1. Έστω: $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ με $f(t) := |t-\frac{1}{2}|$ για κάθε $t \in [0,1]$.

Η f είναι Lipschitz καθώς:

$$|f(t)-f(s)| = \left||t-\tfrac{1}{2}|-|s-\tfrac{1}{2}|\right| = \left||t-\tfrac{1}{2}|-|\tfrac{1}{2}-s|\right| \leq |(t-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-s)| = |t-s|$$

για κάθε $t,s \in [0,1]$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει σταθερά $\tilde{c}>0$ τ.ω. $\|f-B_nf\|_\infty \geq \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (βλ. Rivlin). Αυτό σημαίνει ότι η τάξη σύγκλισης $1/2$ ως προς $1/n$ δεν βελτιώνεται στις Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις.

2. Μπορεί να αποδειχθεί (Jackson) ότι: $\text{dist}(f, \mathbb{P}^n[0,1]) \leq \frac{C}{n}$ όταν $f \in C^1([0,1];\mathbb{R})$.

18.14.

Καμπύλες Bézier.

Τα πολυώνυμα Bernstein χρησιμοποιούνται για την κατασκευή ειδικών καμπυλών στο επίπεδο που "προσεγγίζουν" ένα σύνολο σημείων. Αυτές οι καμπύλες ορίστηκαν από τον P. Bézier και χρησιμοποιήθηκαν σε ένα λογισμικό σχεδιαστικό στην Renault για κελύφη αυτοκινήτων.

Συμβολισμός: $B^n_\ell(t) = \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell} \in \mathbb{P}^n$, $\ell = 0, \dots, n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Έτσι: $B_n f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} f(\ell/n)\, B^n_\ell(t)$.

Ορισμός (καμπύλη Bézier)

Έστω $\Gamma = (\gamma_\ell)_{\ell=0}^{n} \subset \mathbb{R}^2$. ~~με $\gamma_\ell \neq \gamma_{\ell'}$ όταν $\ell \neq \ell'$~~ Η καμπύλη Bézier $B_\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ βαθμού n που αντιστοιχεί στο Γ ορίζεται ως εξής:

$$B_\Gamma(t) = \sum_{\ell=0}^{n} B^n_\ell(t)\, \gamma_\ell .$$

Τα σημεία του συνόλου Γ καλούνται "σημεία ελέγχου" (control points) της καμπύλης Bézier. □

18.15

Παραδείγματα:

1. $\underline{n=0}$: $\Gamma=(\gamma_0)$ $\quad B_0^0(t)=\binom{0}{0}t^0(1-t)^0=1$

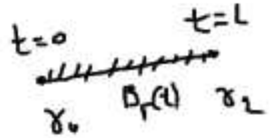
$$B_\Gamma(t)=B_0^0(t)\gamma_0=\gamma_0 \qquad \forall t\in[0,1]$$

2. $\underline{n=1}$: $\Gamma=(\gamma_j)_{j=0}^{1}$ $\quad B_0^1(t)=\binom{1}{0}t^0(1-t)=(1-t)$

$$B_1^1(t)=\binom{1}{1}t(1-t)^0=t$$

$$\forall t\in[0,1]:\ B_\Gamma(t)=\gamma_0 B_0^1(t)+\gamma_1\cdot B_1^1(t)$$

$$=(1-t)\gamma_0+t\gamma_1=\gamma_0+t(\gamma_1-\gamma_0).$$

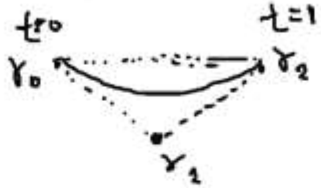


3. $\underline{n=2}$: $\Gamma=(\gamma_j)_{j=0}^{2}$, $B_0^2(t)=\frac{2!}{0!\,2!}(1-t)^2=(1-t)^2$, $B_1^2(t)=\frac{2!}{1!\,1!}t(1-t)=2t(1-t)$

$$B_2^2(t)=\frac{2!}{2!\,0!}t^2=t^2.$$

$$B_\Gamma(t)=(1-t)^2\gamma_0+2t(1-t)\gamma_1+t^2\gamma_2$$

$$B_\Gamma(0)=\gamma_0,\ B_\Gamma(1)=\gamma_2$$



K.O.K.