19.0

Διάλεξη 19

(βίντεο)

ΜΕΜ 955 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

Αναδρομή: $B_\ell^n(t) = \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ $\forall t\in[0,1]$, $\ell=0,\dots,n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

$\{B_\ell^n : \ell=0,\dots,n\}$ βάση Bernstein βαθμού n

Η καμπύλη Bézier βαθμού n με σημεία ελέγχου $\Gamma=(\gamma_\ell)_{\ell=0}^n$ ορίζεται από τον τύπο:

$$B_\Gamma(t) = \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\,\gamma_\ell \quad \forall t\in[0,1]. \qquad \#$$

Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια ένα αποτέλεσμα προσέγγισης μιας συνεχούς καμπύλης από καμπύλες Bézier.

Πρόταση: Έστω συνεχής καμπύλη $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ και $\Gamma_n := \left\{\gamma\left(\frac{\ell}{n}\right) : \ell=0,\dots,n\right\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τότε: $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{t\in[0,1]} \|\gamma(t)-B_{\Gamma_n}(t)\|_1 = 0$, όπου $\|x\|_1 := |x_1|+|x_2|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^2$.

Απόδειξη: Προφανώς: $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))^T$ $\forall t\in[0,1]$ για κάποιες συναρτήσεις $\gamma_1,\gamma_2\in C([0,1];\mathbb{R})$. Παρατηρώντας ότι: $B_{\Gamma_n}(t) = (B_n\gamma_1(t), B_n\gamma_2(t))^T$ για κάθε $t\in[0,1]$ και $n\in\mathbb{N}$, έπεται ότι: $\|\gamma(t)-B_{\Gamma_n}(t)\|_1 = \sum_{j=1}^{2} |B_n\gamma_j(t)-\gamma_j(t)|$
$\le \sum_{j=1}^{2} \|B_n\gamma_j-\gamma_j\|_\infty$ για κάθε $t\in[0,1]$ και $n\in\mathbb{N}_0$. Άρα:

Επομένως: $\max\limits_{[0,1]} \|\gamma - B_{\Gamma_n}\|_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{2} \|B_n\gamma_j - \gamma_j\|_\infty$. Επειδή $\|B_n\gamma_j - \gamma_j\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

για $j=1,2$, έπεται ότι: $\max\limits_{[0,1]} \|\gamma - B_{\Gamma_n}\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ∎

<u>Σημείωση:</u> Στον ορισμό της καμπύλης Bézier δεν είναι απαραίτητο να απαιτήσουμε ότι: $\gamma_\ell \neq \gamma_{\ell'}$ για $\ell \neq \ell'$, δηλ. ότι το Γ αποτελείται από $n+1$ διαφορετικά ανά δύο σημεία.
Αυτό που έχει σημασία είναι η σειρά τους καθώς το γ_0 είναι το σημείο από το οποίο "ξεκινά" η καμπύλη και γ_n είναι το σημείο στο οποίο "λήγει" η καμπύλη καθώς:
$B^n_\ell(0) = \begin{cases} 0 & 0<\ell\leq n \\ 1 & \ell=0 \end{cases}$ και $B^n_\ell(1) = \begin{cases} 0 & 0\leq\ell<n \\ 1 & \ell=n \end{cases}$. Ας δούμε μια συγκεκριμένη περίπτωση,
όπου $n=2$ και $\Gamma = (\gamma_j)_{j=0}^{2}$. Είδαμε ότι: $B_\Gamma(t) = (1-t)^2\gamma_0 + 2t(1-t)\gamma_1 + t^2\gamma_2 \quad \forall t\in[0,1]$.

Όταν, π.χ. $\gamma_0=\gamma_2$, τότε $B_\Gamma(t) = \gamma_0[t^2+t^2+1-2t] + 2t(1-t)\gamma_1 = \gamma_0(2t^2+1-2t) + 2t(1-t)\gamma_1$
$= \underbrace{2t(1-t)}_{s}\gamma_1 + [1-\underbrace{2t(1-t)}_{s}]\gamma_0$. Παρατηρώντας ότι: $0\leq 2t(1-t)\leq \frac{1}{2}$ όταν $t\in[0,1]$, συμπεραίνουμε ότι: $B_\Gamma(t)$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα:

το οποίο "σκρωτάει" δύο φορές από γ_0 έως γ_1 και από γ_1 έως $\gamma_2=\gamma_0$.

Αλγόριθμος De Casteljau

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα υπολογισμού των σημείων μιας καμπύλης Bézier. Πρώτα θα παρουσιάσουμε ένα αναδρομικό τύπο για τα πολυώνυμα της βάσης Bernstein.

Πρόταση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι:

$$B_\ell^n(t) = (1-t)\,B_\ell^{n-1} + t\,B_{\ell-1}^{n-1}(t), \quad \ell = 0, \dots, n$$

με τη σύμβαση ότι: $B_{-1}^{n-1}(t) \equiv 0$ και $B_n^{n-1}(t) \equiv 0$.

Απόδειξη: Έστω $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Π1. $\ell = 0$. Τότε έχουμε $B_0^n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^{n-0} = (1-t)^n = (1-t)(1-t)^{n-1} = (1-t)\binom{n-1}{0} t^0 (1-t)^{n-1-0}$

$$= (1-t)\,B_0^{n-1}(t) = (1-t)\,B_0^{n-1}(t) + t\,\underbrace{B_{-1}^{n-1}(t)}_{=0}.$$

19.4

Π2. $\ell=n$. Τότε έχουμε: $B_n^n(t)=\binom{n}{n}t^n(1-t)^{n-n}=t^n=t\cdot t^{n-1}=t\binom{n-1}{n-1}t^{n-1}(1-t)^{n-1-(n-1)}$

$$= t\,B^{n-1}_{n-1}(t) = t\,B^{n-1}_{n-1}(t)+(1-t)\underbrace{B^{n-1}_{n}(t)}_{=0}.$$

Π3. $1\le \ell\le n-1$. Τότε έχουμε: $(1-t)\,B^{n-1}_{\ell}(t)+t\,B^{n-1}_{\ell-1}(t)$

$$= (1-t)\binom{n-1}{\ell}t^{\ell}(1-t)^{n-1-\ell}+t\binom{n-1}{\ell-1}t^{\ell-1}(1-t)^{n-1-\ell+1}$$

$$= \binom{n-1}{\ell}t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}+\binom{n-1}{\ell-1}t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}$$

$$= t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\left[\frac{(n-1)!}{\ell!\,(n-1-\ell)!}+\frac{(n-1)!}{(\ell-1)!\,(n-\ell)!}\right]$$

$$= t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}(n-1)!\left[\frac{(n-\ell)}{\ell!\,(n-\ell)!}+\frac{\ell}{\ell!\,(n-\ell)!}\right]$$

$$= t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\frac{(n-1)!}{\ell!\,(n-\ell)!}(n-\ell+\ell)=\underbrace{\frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!}}_{=\binom{n}{\ell}}t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}=B^{n}_{\ell}(t)$$

$\blacksquare$

Με τη βοήθεια του αναδρομικού τύπου της προηγούμενης πρότασης προκύπτει ο αλγόριθμος De Casteljau (Citroën).

Θεώρημα: Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\Gamma = (\gamma_\ell)_{\ell=0}^{n}$ τα σημεία ελέγχου μιας καμπύλης Bézier βαθμού n. Τότε: για κάθε $t \in [0,1]$ ισχύει $B_\Gamma(t) = b_0^n$ όπου:

$$b_\ell^0 = \gamma_\ell \,, \ \ell = 0, \dots, n$$

$$b_\ell^m = (1-t)\, b_\ell^{m-1} + t\, b_{\ell+1}^{m-1} \,, \ \ell = 0, \dots, n-m \,, \ m = 1, \dots, n$$

Απόδειξη:

Θα γίνει με επαγωγή ως προς n.

Βήμα 1: $n=1$. Τότε $\Gamma = (\gamma_\ell)_{\ell=0}^{1}$. Και

$$B_\Gamma(t) = \sum_{\ell=0}^{1} B_\ell^n(t)\gamma_\ell = B_0^1(t)\gamma_0 + B_1^1(t)\gamma_1 = B_0^1(t)\cdot b_0^0 + B_1^1(t)\, b_1^0$$

$$= \binom{1}{0} t^0 (1-t)\, b_0^0 + \binom{1}{1} t (1-t)^0\, b_1^0 = (1-t)\, b_0^0 + t\, b_1^0 = b_0^1$$

Βήμα 2. Υποθέτουμε ότι: $B_\Gamma(t) = b_0^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ και οποιοδήποτε σύνολο σημείων ελέγχου Γ με $n+1$ σημεία. Έστω $\Delta = (\delta_\ell)_{\ell=0}^{n+1} \subset \mathbb{R}^2$. Τότε:

$$B_\Delta(t) = \sum_{\ell=0}^{n+1} B_\ell^{n+1}(t)\,\delta_\ell = \sum_{\ell=0}^{n+1}\left[(1-t)B_\ell^n(t) + t\,B_{\ell-1}^n(t)\right]\delta_\ell$$

$$= (1-t)\sum_{\ell=0}^{n+1} B_\ell^n(t)\delta_\ell + t\sum_{\ell=0}^{n+1} B_{\ell-1}^n(t)\delta_\ell$$

$$= (1-t)\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\delta_\ell + \underbrace{(1-t)B_{n+1}^n(t)\delta_{n+1}}_{=0}$$

$$+\, t\sum_{\ell=1}^{n+1} B_{\ell-1}^n(t)\delta_\ell + \underbrace{t\,B_{-1}^{n}(t)\,\delta_0}_{=0}$$

$$= (1-t)\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\delta_\ell + t\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\delta_{\ell+1}.$$

Έστω $\Gamma_1 = (\delta_\ell)_{\ell=0}^{n}$ και $\Gamma_2 = (\delta_\ell)_{\ell=1}^{n}$. Τότε η παραπάνω σχέση μας δίνει: $B_\Delta(t) = (1-t)B_{\Gamma_1}(t) + t\,B_{\Gamma_2}(t)$.

Ο αλγόριθμος De Casteljau με σημεία ελέγχου Δ δίνει: 19.7

$$b_\ell^0 := \delta_\ell, \quad \ell=0,\dots,n+1$$

$$b_\ell^m = (1-t)\, b_\ell^{m-1} + t\, b_{\ell+1}^{m-1}, \quad \ell=0,\dots,n+1-m, \quad m=1,\dots,n+1.$$

με σημεία ελέγχου Γ_1 δίνει

$$J_\ell^0 := \delta_\ell, \quad \ell=0,\dots,n$$

$$J_\ell^m := (1-t)\, J_\ell^{m-1} + t\, J_{\ell+1}^{m-1}, \quad \ell=0,\dots,n-m, \quad m=1,\dots,n.$$

και με σημεία ελέγχου Γ_2 δίνει:

$$Z_\ell^0 = \delta_{\ell+1}, \quad \ell=0,\dots,n$$

$$Z_\ell^m = (1-t)\, Z_\ell^{m-1} + t\, Z_{\ell+1}^{m-1}, \quad \ell=0,\dots,n-m, \quad m=1,\dots,n.$$

Σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση: $B_{\Gamma_1}(t) = J_0^n$ και $B_{\Gamma_2}(t) = Z_0^n$.

Επειδή $J_\ell^0 = b_\ell^0$ για $\ell=0,\dots,n$, έπεται ότι: $J_\ell^m = b_\ell^m$ για $\ell=0,\dots,n-m$ και $m=1,\dots,n$. Έτσι: $B_{\Gamma_1}(t) = J_0^n = b_0^n$. Επειδή $Z_\ell^0 = b_{\ell+1}^0$ για $\ell=0,\dots,n$,

έπεται ότι: $Z_\ell^m = b_{\ell+1}^m$ για $\ell=0,\dots,n$, $m=1,\dots,n$.

Έτσι: $\boxed{B_{\Gamma_2}(t) = Z_0^n = b_1^n}$.

19.8

Έτσι: $$\begin{aligned} B_\Delta(t) &= (1-t)\, B_{\Gamma_1}(t) + t\, B_{\Gamma_2}(t) \\ &= (1-t)\, b_0^n + t\, b_1^n \\ &= b_0^{n+1} \end{aligned}$$

Κόστος υπολογισμού του $B_\Gamma(t)$:

Ο αλγόριθμος De Casteljau απαιτεί, για κάθε $m \in \{1,\dots,n\}$, $n-m+2$ πολλαπλασιασμούς πραγματικού αριθμού με διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Συνολικά,

$$\sum_{m=1}^{n} (n-m+2) = 2n + \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = 2n + \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell = 2n + \frac{(n-1)n}{2} = 2n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{3}{2}n = O(n^2)$$

πολ/σμούς πραγματικού αριθμού με διάνυσμα. Το ίδιο κόστος προκύπτει για τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου Bernstein $B_nf(t)$ για κάποια $f \in C([0,1];\mathbb{R})$, καθώς ο αλγόριθμος De Casteljau εφαρμόζεται και όταν τα $(\gamma_\ell)_{\ell=0}^{m}$ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Επίσης η χρήση του αναδρομικού τύπου για τα πολυώνυμα Bernstein σε συνδυασμό με τον τύπο του $B_nf(t)$, οδηγεί σε $O(n^2)$ πολλαπλασιασμούς.

Το κόστος είναι μεγάλο αν το συγκρίνει κανείς με το $O(n)$ κόστος του σχήματος Horner. Αυτό οδήγησε στην αναζήτηση εναλλακτικών μεθόδων υπολογισμού με κόστος $O(n)$.

Ας δούμε πως μπορούμε να καταλήξουμε σε ένα τέτοιο αλγόριθμο

Παρατηρούμε ότι:

$$B_nf(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell} f(\ell/n) = \begin{cases} A(t) & \forall t \in (0,1] \\ B(t) & \forall t \in [0,1) \end{cases}$$

όπου: $$A(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell t^{n-\ell} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{n-\ell} f(\ell/n) = t^n \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\frac{1-t}{t}\right)^{n-\ell}$$

$$B(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (1-t)^{n-\ell} (1-t)^\ell \left(\frac{t}{1-t}\right)^\ell = (1-t)^n \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(\frac{t}{1-t}\right)^\ell.$$

19.10

1 Όταν: $t\in[1/2,1]$ χρησιμοποιούμε τον τύπο $A(t)$ και όταν $t\in[0,1/2]$ χρησιμοποιούμε τον τύπο $B(t)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner καταλήγουμε σε κόστος $O(n)$ σε πολλαπλασιασμούς λαμβάνοντας υπόψιν ότι: $\binom{n}{l+1}=\frac{n-l}{l+1}\binom{n}{l}$ για $l=0,\dots,n-1$.

Παρόλα αυτά στη βιβλιογραφία (βλ. Delgado and Peñas) αναφέρεται ότι ο αλγόριθμος De Casteljau έχει καλύτερη (ευσταθή) συμπεριφορά σε περιβάλλον υπολογισμών πεπερασμένης ακρίβειας.

Προσέγγιση με τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Ορισμός: Τριγωνομετρικό πολυώνυμο καλείται κάθε στοιχείο του συνόλου:

$$\mathcal{T} := \text{span}\left\{ (\cos(\ell x))_{\ell\in\mathbb{N}_0}, (\sin(\ell x))_{\ell\in\mathbb{N}} \right\}$$

Έστω: $N\in\mathbb{N}_0$. Τότε το σύνολο:

$$\mathcal{T}^N := \text{span}\left\{ (\cos(\ell x))_{\ell=0}^{N}, (\sin(\ell x))_{\ell=1}^{N} \right\}$$

καλείται σύνολο των τριγωνομετρικών πολυωνύμων βαθμού μέχρι N.

Τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του ακόλουθου θεωρήματος Weierstrass για τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Θεώρημα. Έστω $C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}) = \{ g\in C([-\pi,\pi];\mathbb{R}) : g(\pi)=g(-\pi) \}$. Τότε το σύνολο $\mathcal{T}[-\pi,\pi]$ είναι πυκνό στον $(\mathbb{R}, C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$.

Για την απόδειξη του προαναφερόμενου θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε ως εργαλείο το Θεώρημα Korovkin το οποίο θα περιγράψουμε και θα αποδείξουμε στη συνέχεια. | 19.12.

Ορισμός: Έστω απεικόνιση $L: (\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$.
Λέμε ότι η L είναι γραμμική όταν: $L(\alpha f+g) = \alpha Lf + Lg$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και $f,g \in C([a,b];\mathbb{R})$. Λέμε ότι η L είναι μονότονη όταν για κάθε $f,g \in C([a,b];\mathbb{R})$ με: $f \geq g$ στο $[a,b]$ έπεται: $Lf \geq Lg$ στο $[a,b]$.

Σημείωση: Όταν η L είναι γραμμική τότε: (είναι μονότονη) $\overset{A}{}$ ανν $\overset{B}{(}$για κάθε $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ με: $f \geq 0$ στο $[a,b]$ ισχύει $Lf \geq 0$ στο $[a,b]$)

Πράγματι:

$\boxed{A \Rightarrow B}$ Έστω $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ με: $f \geq 0$ στο $[a,b]$. Επιπλέον, έστω $g \in C([a,b];\mathbb{R})$ με: $g=0$ στο $[a,b]$. Επειδή: $f \geq g$ στο $[a,b]$, έπεται ότι: $Lf \geq Lg$ στο $[a,b]$. Επειδή η L είναι γραμμική έχουμε: $Lg = L(g+g) = Lg+Lg$. Άρα: $Lg=0$. Τελικά, έχουμε: $Lf \geq 0$ στο $[a,b]$

19.13

$\boxed{B \Rightarrow A}$: 'Εστω: $f,g \in C([a,b];\mathbb{R})$ με: $f \geq g$ στο $[a,b]$. Άρα: $f-g \geq 0$ στο $[a,b]$. Άρα: $L(f-g) \geq 0$ στο $[a,b]$. Επειδή η L είναι γραμμική έπεται: $Lf - Lg \geq 0$ στο $[a,b] \Rightarrow Lf \geq Lg$ στο $[a,b]$. $\square$

<u>Παραδείγματα</u>:

1. Εστω $n \in \mathbb{N}$ και $B_n: (\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ με: $B_n f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell} f\left(\frac{\ell}{n}\right)$ $\forall t \in [0,1]$, $\forall f \in C([0,1];\mathbb{R})$. Ο τελεστής Bernstein είναι προφανώς γραμμικός και μονότονος.

2. 'Εστω: $K \in C([a,b]\times[a,b], \mathbb{R})$ με: $K(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in [a,b]$. Ορίζουμε απεικόνιση $L: (\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$ με: $Lf(t) = \int_a^b K(x,t) f(x)\,dx$ $\forall t \in [a,b]$, $\forall f \in C([a,b];\mathbb{R})$. Προφανώς η L είναι γραμμική και μονότονη.

Θεώρημα (Korovkin)

Έστω $X = (\mathbb{R}, C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$, απεικονίσεις $L_n : X \to X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $(\tau_i)_{i=0}^{2} \subset C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ με: $\tau_0(t) = 1$, $\tau_1(t) = \cos(t)$ και $\tau_2(t) = \sin(t)$ για κάθε $t \in [-\pi,\pi]$.

Αν οι απεικονίσεις $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι γραμμικές και μονότονες και $\lim_{n\to+\infty} \|L_n\tau_j - \tau_j\|_\infty = 0$ για $j = 0,1,2$, τότε: $\lim_{n\to+\infty} \|f - L_n f\|_\infty = 0$ για κάθε $f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. □

Χρειαζόμαστε πρώτα κάποια βοηθητικά λήμματα.

Λήμμα 1: Έστω $f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta \in (0, \pi/2)$ τ.ω. $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ $\forall x, y \in [-\pi,\pi]$ με: $|x-y| < \delta$ ή $|x-y| > 2\pi - \delta$

Απόδειξη: Έστω $f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. Επιπλέον, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ έπεται ότι είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-\pi,\pi]$! Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. όταν $x, y \in [-\pi,\pi]$ και $|x-y| < \delta$ τότε: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$.

Θέτουμε $\delta = \tilde{\delta}$ όταν $\tilde{\delta} \in (0, \pi/2)$ διαφορετικά διαλέγουμε κάποιο $\delta \in (0, \pi/2)$.

19.15

Επομένως όταν $x, y \in [-\pi, \pi]$ και $|x-y| < \delta$ τότε: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$.

Έτσι, για $y = -\pi$, συμπεραίνουμε ότι: $|f(x) - f(-\pi)| < \varepsilon/3$ όταν $|x+\pi| < \delta$ και $x \in [-\pi, \pi]$.

Επιπλέον, για $x = \pi$, συμπεραίνουμε ότι: $|f(y) - f(\pi)| < \varepsilon/3$ όταν $|y - \pi| < \delta$ και $y \in [-\pi, \pi]$.

Άρα όταν: $x, y \in [-\pi, \pi]$, $|x+\pi| < \delta$ και $|y - \pi| < \delta$, τότε:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\le |f(x) - f(-\pi)| + |f(-\pi) - f(y)| \\ &\le |f(x) - f(-\pi)| + |f(\pi) - f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Έστω $x, y \in [-\pi, \pi]$ με: $|x-y| > 2\pi - \delta$. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1:</u> $x > y$. Τότε: $x - y > 2\pi - \delta$. Αν $|\pi - x| \ge \delta$, τότε: $\pi - x \ge \delta$ επειδή $x \le \pi$.

Έτσι: $\pi - \delta \ge x > 2\pi - \delta + y \Rightarrow -\pi > y$ που οδηγεί σε άτοπο. Αν $|y+\pi| \ge \delta$, τότε: $y + \pi \ge \delta$

επειδή $y \ge -\pi$. Έτσι: $x > y + 2\pi - \delta \ge \delta - \pi + 2\pi - \delta = \pi$ που οδηγεί σε άτοπο. Έτσι: $|y+\pi| < \delta$ και $|x - \pi| < \delta$

που συνεπάγεται: $|f(y) - f(x)| < 2\varepsilon/3$.

<u>Περίπτωση 2:</u> $y > x$. Τότε: $y - x > 2\pi - \delta$. Αν $|\pi - y| \ge \delta$, τότε $\pi - y \ge \delta$ καθώς $\pi - y \ge 0$. Έτσι, έχουμε:

$\pi - \delta \ge y > 2\pi - \delta + x \Rightarrow -\pi > x$ που οδηγεί σε άτοπο. Αν $|x+\pi| \ge \delta$ τότε $x + \pi \ge \delta$ καθώς $x \ge -\pi$: Έτσι

έχουμε: $y + \delta - \pi > \pi + x \ge \delta \Rightarrow y > \pi$ που οδηγεί σε άτοπο. Άρα: $|x+\pi| < \delta$ και $|\pi - y| < \delta$, που συνεπάγεται

ότι: $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon/3$.

Επομένως όταν $x,y \in [-\pi,\pi]$ και $|x-y| > 2\pi-\delta$ τότε: $|f(x)-f(y)| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon$. ∎

Λήμμα 2: Για κάθε $\delta \in (0,\pi)$ ισχύει ότι:

$$M_\delta := \min\left\{1-\cos(t-s) : t,s \in [-\pi,\pi] \text{ με } \delta \leq |t-s| \leq 2\pi-\delta\right\} > 0.$$

Απόδειξη: Έστω $\delta \in (0,\pi)$. Επειδή $\cos(x) = \cos(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι: $\cos(x) = \cos(|x|)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι: $M_\delta = \min\left\{1-\cos(\underset{\hookrightarrow z=|t-s|}{z}) : z \in [\delta, 2\pi-\delta]\right\}$. Προφανώς $M_\delta \geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $M_\delta = 0$. Τότε υπάρχει $z_0 \in [\delta, 2\pi-\delta]$ τ.ω. $1-\cos(z_0) = 0$. Άρα: $\cos(z_0) = 1$. Επειδή $[\delta, 2\pi-\delta] \subset [0,2\pi]$ οι μόνες επιλογές που υπάρχουν είναι $z_0 = 0$ και $z_0 = 2\pi$, που δεν ανήκουν στο $[\delta, 2\pi-\delta]$. Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι $M_\delta = 0$. Έτσι: $M_\delta > 0$. ∎

Απόδειξη Θεωρήματος KOROVKIN.

A. Έστω $f=0$. Επειδή οι $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι γραμμικές, έπεται ότι: $L_n f=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$, και προφανώς $\underbrace{\|L_n f-f\|_\infty}_{\overset{\shortparallel}{0}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

B. Έστω $f\neq 0$. Τότε $\|f\|_\infty>0$. Ας υποθέσουμε ότι: $\|L_n g-g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ για κάθε $g\in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ με: $\|g\|_\infty=1$. Τότε θέτοντας $g=\frac{f}{\|f\|_\infty}$ έχουμε: $\|g\|_\infty=1$ και επομένως: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|L_n\left(\frac{f}{\|f\|_\infty}\right)-\frac{f}{\|f\|_\infty}\right\|_\infty=0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\|L_n f-f\|_\infty}{\|f\|_\infty}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\|L_n f-f\|_\infty=0$. Άρα αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα όταν $\|f\|_\infty=1$ και αυτό υποθέτουμε στη συνέχεια.

19.18

Γ. Έστω $\varepsilon>0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 1 υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$ όταν $x,y\in[-\pi,\pi]$ και $|x-y|<\delta$ ή $|x-y|>2\pi-\delta$. Όταν $x,y\in[-\pi,\pi]$ και $|x-y|\in[\delta,2\pi-\delta]$ τότε: $|f(x)-f(y)|\leq 2\|f\|_\infty = \underbrace{2 \leq 2}_{\text{Λήμμα 2}} \dfrac{1-\cos(x-y)}{M\delta}$. Άρα:

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon + 2\,\frac{1-\cos(x-y)}{M\delta} \quad \text{για κάθε } x,y\in[-\pi,\pi].$$

Έστω: $x\in[-\pi,\pi]$. Παρατηρώντας ότι: $\cos(\hat{x}-\hat{y})=\cos(\hat{x})\cos(\hat{y})+\sin(\hat{x})\sin(\hat{y})$ για κάθε $\hat{x},\hat{y}\in[-\pi,\pi]$, για κάθε $y\in[-\pi,\pi]$ έχουμε τα ακόλουθα:

$$-\varepsilon-\frac{2}{M\delta}\left(1-\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\right) < f(y)-f(x) < \varepsilon+\frac{2}{M\delta}\left(1-\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\right)$$

$$\Rightarrow -\left(\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\right)\tau_0(y)+\frac{2\cos(x)}{M\delta}\tau_1(y)+\frac{2\sin(x)}{M\delta}\tau_2(y) < f(y)-f(x)\tau_0(y) < \left(\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\right)\tau_0(y)-\frac{2\cos(x)}{M\delta}\tau_1(y) - \frac{2\sin(x)}{M\delta}\tau_2(y).$$

Επειδή οι απεικονίσεις $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονες και γραμμικές, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έπεται ότι:

19.19

$$-\left(\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\right)L_n\tau_0+\frac{2\cos(x)}{M\delta}L_n\tau_1+\frac{2\sin(x)}{M\delta}L_n\tau_2 < -f(x)L_n\tau_0+L_nf$$

$$< \left(\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\right)L_n\tau_0-\frac{2\cos(x)}{M\delta}L_n\tau_1-\frac{2\sin(x)}{M\delta}L_n\tau_2$$

στο $[-\pi,\pi]$

$$\Rightarrow \quad \left|f(x)L_n\tau_0(y)-L_nf(y)\right| < \left(\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\right)L_n\tau_0(y)-\frac{2\cos(x)}{M\delta}L_n\tau_1(y)-\frac{2\sin(x)}{M\delta}L_n\tau_2(y)$$

$$< \varepsilon L_n\tau_0+\frac{2}{M\delta}\Big[(L_n\tau_0-\tau_0)(y)-\cos(x)(L_n\tau_1-\tau_1)(y)-\sin(x)(L_n\tau_2-\tau_2)(y)$$
$$+\tau_0(y)-\cos(x)\tau_1(y)-\sin(x)\tau_2(y)\Big] \quad \forall y\in[-\pi,\pi]$$

Επομένως, για $y=x$, έπεται:

$$\left|f(x)L_n\tau_0(x)-L_nf(x)\right| < \varepsilon L_n\tau_0(x)+\frac{2}{M\delta}\Big[(L_n\tau_0(x)-\tau_0(x))-\cos(x)(L_n\tau_1(x)-\tau_1(x))$$
$$-\sin(x)(L_n\tau_2(x)-\tau_2(x))$$
$$+\underbrace{1-\cos^2(x)-\sin^2(x)}_{=0}\Big] \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad \left|f(x)L_n\tau_0(x)-L_nf(x)\right| < \left(\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\right)\left|L_n\tau_0(x)-\tau_0(x)\right|+\varepsilon+\frac{2}{M\delta}\sum_{j=1}^{2}\left|L_n\tau_j(x)-\tau_j(x)\right| \quad \forall x\in[-\pi,\pi]$$

$\forall n\in\mathbb{N}$.

Έτσι:

$$\|f-L_nf\|_\infty = \|f\tau_0 - fL_n\tau_0 + fL_n\tau_0 - L_nf\|_\infty \leq \|f(\tau_0 - L_n\tau_0)\|_\infty + \|fL_n\tau_0 - L_nf\|_\infty$$

$$\leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{=1} \|L_n\tau_0 - \tau_0\|_\infty + \|fL_n\tau_0 - L_nf\|_\infty$$

$$\leq \|L_n\tau_0 - \tau_0\|_\infty + \left(\varepsilon + \frac{2}{M\delta}\right)\|L_n\tau_0 - \tau_0\|_\infty + \varepsilon$$

$$+ \frac{2}{M\delta}\sum_{j=1}^{2}\|L_n\tau_j - \tau_j\|_\infty . \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Άρα:

$$0 \leq \limsup_{n\to+\infty} \|f-L_nf\|_\infty \leq \varepsilon$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon>0$ άρα: $0 \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} \|f-L_nf\|_\infty \leq 0$

που οδηγεί στο συμπέρασμα: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f-L_nf\|_\infty = 0$

■