Διάλεξη 2

Τετάρτη 7/10/2020

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

Παράδειγμα 3: $X = (\mathbb{R}, C([\alpha,\beta];\mathbb{R}), +, \cdot)$

$$p \geq 1 \quad \|f\|_p := \left(\int_\alpha^\beta |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \forall f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$$

Η νόρμα $\|\cdot\|_p$ είναι καλά ορισμένη επειδή η $|f|^p$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ (άρα και ολοκληρώσιμη στο $[\alpha,\beta]$) όταν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

Έχουμε ήδη δείξει ότι:

1. $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \, \|f\|_p \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$
2. $\|0\|_p = 0$, και, αν $\|f\|_p = 0$ για κάποιο $f \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$, τότε $f = 0$.

Μένει να εξασφαλίσουμε ότι:

$\boxed{3}$ $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \forall f,g \in C([\alpha,\beta];\mathbb{R})$

Ανισότητα Minkowski

Θα χρειαστούμε τις ακόλουθες ανισότητες:

1. Ανισότητα Young
2. Ανισότητα Hölder

2.2

Ανισότητα Young

Έστω: $p>1$ και $q\in\mathbb{R}$ τ.ω $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Τότε:

$$\forall x,y\geq 0: \quad xy\leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

Παρατηρήσεις:

1. Όταν $p=2$ τότε $q=2$ και η σχέση έχει τη μορφή:

$$xy\leq \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$$

↳ αριθμητική-γεωμετρική ανισότητα

2. Όταν $p>1$ τότε: $\frac{1}{p}<1$ άρα $1-\frac{1}{p}>0$. Άρα η ισότητα $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$ έχει νόημα και μας δίνει: $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$ ή ισοδύναμα $q=\frac{p}{p-1}>1$.

↳ $\frac{p}{q}=p-1$

2.3

Απόδειξη:

Θα διακρίνουμε περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $x=0$ ή $y=0$

Τότε: $\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}\geq 0=xy$! Έτσι η ανισότητα Young ισχύει ως ισότητα.

Περίπτωση 2: $x>0, y>0$ και $x^p=y^q$.

↳ $y=x^{p/q}$

Τότε έχουμε τα ακόλουθα:

$$x\cdot y=x\cdot x^{p/q}=x\,x^{p-1}=x^p=x^p\underbrace{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}_{=1}=\frac{x^p}{p}+\frac{x^p}{q}$$

$$=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}.$$

Άρα η ανισότητα Young ισχύει ως ισότητα.

Περίπτωση 3: $x>0,\ y>0,\ x^p>y^q$

Για απλούστευση θέτουμε: $r=x^p$ και $s=y^q$. Θα δείξουμε ότι η ανισότητα Young ισχύει ως γνήσια ανισότητα. Παρατηρούμε ότι:

$$xy<\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \Leftrightarrow r^{1/p}s^{1/q}<\frac{r}{p}+\frac{s}{q} \Leftrightarrow r^{1/p}s^{\frac{p-1}{p}}<s\left(\frac{r}{s}\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)$$

$$\Leftrightarrow r^{1/p}s^{1-1/p}s^{-1}<\frac{r}{s}\frac{1}{p}+1-1/p$$

$$\Leftrightarrow r^{1/p}s^{-1/p}<\frac{r}{s}\frac{1}{p}+1-1/p \Leftrightarrow (r/s)^{1/p}<\frac{r}{s}\frac{1}{p}+1-\frac{1}{p}$$

$$\Leftrightarrow (r/s)^{1/p}<\frac{1}{p}(r/s-1)+1.$$

Ας θέσουμε: $t=r/s>1$. Τότε αρκεί να δείξουμε είναι ότι:

$$t^{1/p}<\frac{1}{p}(t-1)+1 \quad \forall t>1.$$

Η απόδειξη θα γίνει χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor για τη συνάρτηση $\varphi(t)=t^{1/p}$ $\forall t\geq 1$.

2.5

Έστω $t>1$. Τότε: ο τύπος TAYLOR γύρω από το 1

$\varphi(t)=\varphi(1)+(t-1)\varphi'(\hat{t})$ για κάποιο $\hat{t}$ αυστηρά ανάμεσα στα 1 και t, δηλ. $1<\hat{t}<t$

$$\Rightarrow t^{1/p}=1+(t-1)\cdot\frac{1}{p}(\hat{t})^{1/p-1}$$

$$\Rightarrow t^{1/p}=1+\overset{>0}{\frac{(t-1)}{p}}(\hat{t})^{-1/q}<1$$

Επειδή $\hat{t}>1 \Rightarrow (\hat{t})^{1/q}>1 \Leftrightarrow (\hat{t})^{-1/q}<1$. Επομένως

$$t^{1/p}=1+\frac{(t-1)}{p}(\hat{t})^{-1/q}<1+\frac{(t-1)}{p}.$$

Περίπτωση 4: $x,y>0$ και $x^p<y^q$. Η απόδειξη είναι ανάλογη της Περίπτωσης 3

Ανισότητα Hölder

Για κάθε $f, g \in C([\alpha, \beta]; \mathbb{R})$ και $p > 1$ ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta |f(x)||g(x)|\,dx \le \|f\|_p \, \|g\|_q$$

όπου: $q > 1$ με: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Απόδειξη: Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1: $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$

Τότε: $\|f\|_p \cdot \|g\|_q = 0 = \int_\alpha^\beta |f(x)| \cdot |g(x)|\,dx$, δηλ. η ανισότητα Hölder ισχύει ως ισότητα.

Περίπτωση 2: $f \not\equiv 0$ και $g \not\equiv 0$.

Τότε: $\|f\|_p > 0$ και $\|g\|_q > 0$. Άρα μπορούμε να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της προς απόδειξη σχέσης με: $\|f\|_p \|g\|_q$, δηλ.

$$\int_\alpha^\beta |f(x)||g(x)|\,dx \le \|f\|_p \, \|g\|_q$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\,dx \le 1$$

Για να αποδείξουμε την τελευταία σχέση θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Young ως εξής:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \le \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\right)^q \quad \forall x \in [\alpha, \beta]$$

$$\Rightarrow \int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}\,dx \le \frac{1}{p}\underbrace{\left(\int_\alpha^\beta \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\,dx\right)}_{=1} + \frac{1}{q}\underbrace{\left(\int_\alpha^\beta \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\,dx\right)}_{=1}$$

$$\le 1/p + 1/q = 1$$

Μένει να αποδείξουμε ότι: 2.8

Ανισότητα Minkowski:	$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \quad \forall f,g \in C([\alpha,\beta],\mathbb{R}),\ p>1$

Απόδειξη: Έστω: $f,g \in C([\alpha,\beta],\mathbb{R})$ και $q>1$ τ.ω. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Τότε:

$$\|f+g\|_p^p = \int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx = \int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{p-1} \cdot |f(x)+g(x)| \, dx$$

$$\le \int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{p-1} \left(|f(x)|+|g(x)|\right) dx$$

$$\le \int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)| \, dx + \int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{p-1} |g(x)| \, dx$$

$$\underset{\substack{\text{Hölder} \\ p \to f,g}}{\le} \|f\|_p \, \| |f+g|^{p-1} \|_q + \|g\|_p \, \| |f+g|^{p-1} \|_q$$

$$\le \|f\|_p \left[\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx\right]^{1/q} + \|g\|_p \left[\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\right]^{1/q}$$

Επειδή: $(p-1)q = (p-1)\,\frac{p}{p-1} = p$ 2.9

έπεται ότι:

$$\|f+g\|_p^p \le \|f\|_p \left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/q}$$

$$+ \|g\|_p \left(\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{1/q}$$

$$\le \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left[\int_\alpha^\beta |f(x)+g(x)|^p dx\right]^{1/q}$$

$$\le \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \|f+g\|_p^{p/q}$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^{p-\frac{p}{q}} \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^{\underbrace{p(1-1/q)}_{=1/p}} \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p .$$

■

Παράδειγμα 4: 2.10

$$\mathbb{X} = \big(\underbrace{(\mathbb{R},+,\cdot)}_{\text{σώμα}}, \mathbb{R}^n, +, \cdot\big)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty := \max_{1\le i\le n} |x_i|$ νόρμα απειροπληθούς

$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ νόρμα 1

$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$ p-νόρμα

$p>1$

Άσκηση: $\xrightarrow{\text{Holder}}$ $\sum_{i=1}^{n} |x_i||y_i| \le \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}}_{\|x\|_p} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}}_{\|y\|_q}$

$\forall x,y \in \mathbb{R}^n$.

Άσκηση: Δείξτε ότι $\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$ με $p>1$.

2.11

Παράδειγμα 5:

$$\mathbb{X} = \big((\mathbb{R},+,\cdot), \ell^p, +, \cdot\big) \qquad p=\infty, 1, >1$$

$\mathbb{R}^\infty$ = σύνολο των ακολουθιών πραγματικών αριθμών

$= \{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} : \alpha_n \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}\} = \{\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$

Στο $\mathbb{R}^\infty$ ορίζω πρόσθεση $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} + (\beta_n)_{n=1}^{\infty} = (\alpha_n+\beta_n)_{n=1}^{\infty}$

και γινόμενο με πραγματικό αριθμό $\lambda(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$. Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$\ell^\infty := \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty : \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i| < +\infty\}$$

με νόρμα $\|a\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$,

$$\ell^1 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^\infty : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty\}$$ με νόρμα $\|a\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$$\ell^p = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$ 2.12

$p > 1$

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>Άσκηση</u>: Δείξτε ότι ο ℓ^p είναι γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ με τις συνήθεις πράξεις και ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα (για $p = \infty, 1, p > 1$).

<u>Σημ.</u> Ο ℓ^p είναι απειροδιάστατος ενώ ο $\mathbb{R}^n$ έχει πεπερασμένη διάσταση. $\blacksquare$

<u>Πρόταση</u> (αντίστροφη τριγωνική ανισότητα).
Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα.

Τότε: $\big| \|v\| - \|w\| \big| \leq \|v - w\| \quad \forall v, w \in V.$

<u>Απόδ.</u> Στηρίζεται στην τριγωνική ανισότητα.

2.13

Έστω $v, w \in V$. Τότε:

$$\|v\| = \|v - w + w\| \leq \|v - w\| + \|w\|$$

Άρα: $\|v\| - \|w\| \leq \|v - w\| \quad (1)$

Ανάλογα: $\|w\| = \|-w\| = \|v - w - v\| \leq \|v - w\| + \|-v\|$
$\leq \|v - w\| + \|v\|$

Άρα: $\|w\| - \|v\| \leq \|v - w\|. \quad (2)$

Έτσι: $\|v - w\| \overset{(1)\kappa(2)}{\geq} \max\left\{ \|v\| - \|w\|, \|w\| - \|v\| \right\}$
$\geq \max\Big\{ \underbrace{\|v\| - \|w\|}_{x}, \underbrace{-(\|v\| - \|w\|)}_{-x} \Big\} = \underbrace{\big|\|v\| - \|w\|\big|}_{|x|}.$

$(|x| = \max\{x, -x\})$ $\blacksquare$