20.0

Διάλεξη 20

(βίντεο)

ΜΕΜ 255 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

20.1

Αναδρομή

Έστω:

1. Korovkin: $X = (\mathbb{R}, C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$,

$L_n : X \to X$ γραμμική και μονότονη για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$\tau_0, \tau_1, \tau_2 \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ $\tau_0(x) = 1$, $\tau_1(x) = \cos(x)$, $\tau_2(x) = \sin(x)$ για κάθε $x \in [-\pi,\pi]$.

Αν $\|L_n \tau_k - \tau_k\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $k = 0,1,2$,

τότε $\|L_n f - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ για κάθε $f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$.

4. Weierstrass για τριγωνομετρικά πολυώνυμα:

Το σύνολο $T[-\pi,\pi]$ είναι πυκνό στον X #

20.2

Απόδειξη τριγωνομετρικού Θεωρήματος Weierstrass

A. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε απεικόνιση $L_N : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ ως εξής:

$$(\text{Fejér}) \qquad L_N f := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n f \qquad \forall f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}),$$

όπου:

$$S_n f := \sum_{\ell=0}^{2n} (f, \varphi_\ell)\varphi_\ell \quad , \forall f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}) , \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_\ell(x) := \begin{cases} \dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} & \text{όταν } \ell = 2k-1 \quad k>0 \\[2ex] \dfrac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} & \text{όταν } \ell = 2k \quad k>0 \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{όταν } \ell = 0 \end{cases} \qquad \forall x \in [-\pi,\pi], \forall \ell \in \mathbb{N}_0,$$

και $(g_1,g_2) := \int_{-\pi}^{\pi} g_1(t) g_2(t)\, dt$ για κάθε $g_1, g_2 \in C([-\pi,\pi];\mathbb{R})$.

20.3

B. Παρατηρώντας ότι:

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\varphi_0(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\,dt=\frac{2\pi}{2\pi}=1,$$

$$\forall k\in\mathbb{N}:\quad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{2k}(t)\varphi_{2k}(t)\,dt}_{=(\varphi_{2k},\varphi_{2k})}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kt)\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+\cos(2t))\,dt=\frac{1}{2\pi}\Big[2\pi+\underbrace{\frac{\sin(2t)}{2}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi}}_{=0}\Big]=\frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi=1,$$

$$\forall k\in\mathbb{N}:\quad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_{2k-1}(t)\varphi_{2k-1}(t)\,dt}_{=(\varphi_{2k-1},\varphi_{2k-1})}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kt)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1-\cos^2(kt))\,dt=\frac{1}{\pi}(2\pi-\pi)=\frac{\pi}{\pi}=1,$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\varphi_{2k}(t)\,dt}_{=(\varphi_0,\varphi_{2k})}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kt)\,dt=\frac{1}{\sqrt{2}\pi k}\big[\sin(k\pi)-\sin(-k\pi)\big]=0,$$

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_0(t)\varphi_{2k-1}(t)\,dt}_{=(\varphi_0,\varphi_{2k-1})}=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kt)\,dt}_{\text{περιττή στο }[-\pi,\pi]}=0,$$

20.4

$$\forall \kappa, \kappa' \in \mathbb{N}: \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\varphi_{2\kappa}(t)\, \varphi_{2\kappa'-1}(t)}_{\text{περιττή στο } [-\pi,\pi]}\, dt = 0,$$

$$\forall \kappa, \kappa' \in \mathbb{N}, \ \kappa \neq \kappa': \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2\kappa}(t)\, \varphi_{2\kappa'}(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\kappa t)\cos(\kappa' t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos((\kappa+\kappa')t) + \cos((\kappa-\kappa')t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin((\kappa+\kappa')t)}{(\kappa+\kappa')}\Bigg|_{t=-\pi}^{t=\pi} + \frac{\sin((\kappa-\kappa')t)}{(\kappa-\kappa')}\Bigg|_{t=-\pi}^{t=\pi} \right] = 0,$$

$$\forall \kappa, \kappa' \in \mathbb{N}, \ \kappa \neq \kappa': \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{2\kappa-1}(t)\, \varphi_{2\kappa'-1}(t)\, dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\kappa t)\sin(\kappa' t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos((\kappa-\kappa')t) - \cos((\kappa+\kappa')t)\right] dt$$

$$= 0.$$

Έτσι: $(\varphi_\ell, \varphi_\kappa) = \delta_{\ell\kappa}$ για κάθε $\kappa, \ell \in \mathbb{N}_0$. Στην ουσία το σύνολο $\{\varphi_\ell\}_{\ell=0}^{\infty}$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα στον $Z = (\mathbb{R}, C([-\pi,\pi];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$.

20.5

Έτσι το $S_n f$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathcal{T}^n[-\pi,\pi]$ στον $\mathcal{Z}$.

Γ. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι οι απεικονίσεις $(L_N)_{N=1}^{\infty}$ είναι γραμμικές! Έστω $f\in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ με: $f\geq 0$ στο $[-\pi,\pi]$. Σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε ότι: $L_N f\geq 0$ στο $[-\pi,\pi]$ για κάθε $N\in\mathbb{N}$.

Παρατηρούμε ότι:

$$L_N f(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} S_n(x)=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left[\sum_{k=0}^{2n}(f,\varphi_k)\varphi_k(x)\right]=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\underbrace{\left[\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{2n}\varphi_k(t)\varphi_k(x)\right]}_{K^N(t,x)}dt$$

για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$ και $N\in\mathbb{N}$.

Αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι: $K^N(t,x)\geq 0\quad \forall t,x\in[-\pi,\pi],\ \forall N\in\mathbb{N}$.

20.6

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\mathcal{K}^N(t,x) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{2n}\varphi_k(t)\varphi_k(x) = \frac{1}{N+1}\left[\underbrace{\varphi_0(t)\varphi_0(x)}^{1/2\pi} + \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=0}^{2n}\varphi_k(t)\varphi_k(x)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)} + \frac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left((\cos(kt)\cos(kx) + \sin(kt)\sin(kx)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)} + \frac{1}{2\pi(N+1)}\sum_{n=1}^{N}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(k\underbrace{|t-x|}_{\theta})\right]$$

Όταν $\theta = 0$ ή 2π τότε $\cos(k\theta) = 1$ και προφανώς $\mathcal{K}^N(t,x) > 0$

$\forall t,x \in [-\pi,\pi] \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Εξετάζουμε την περίπτωση $\theta \in (0, 2\pi)$. Έστω: $z = e^{i\theta}$. Τότε:

$$\sum_{k=0}^{m}\cos(k\theta) = Re\left[\sum_{k=0}^{m} \underset{z^k}{\underset{\parallel}{e^{ik\theta}}}\right] = Re\left[\frac{e^{i(m+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right] = Re\left[\frac{(e^{i(m+1)\theta} - 1)(e^{-i\theta} - 1)}{(e^{i\theta} - 1)(e^{-i\theta} - 1)}\right]$$

$$= Re\left[\frac{1 - e^{i(m+1)\theta} - e^{-i\theta} + e^{im\theta}}{1 - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + 1}\right] = \frac{1 - \cos((m+1)\theta) - \cos(\theta) + \cos(m\theta)}{2 - 2\cos(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\cos(m\theta) - \cos((m+1)\theta)}{2 - 2\cos(\theta)} \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}.$$

$\boxed{20.7}$

Έτσι: $$\sum_{k=1}^{m} \cos(k\theta) = -\frac{1}{2} - \frac{\cos((m+1)\theta) - \cos(m\theta)}{2[1-\cos(\theta)]} \quad \forall m \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in (0,2\pi).$$

Επιπλέον, έχουμε: $$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{n=1}^{N}\left[-\frac{1}{2} - \frac{\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)}{2(1-\cos\theta)}\right]$$

$$= -\frac{N}{2} - \frac{1}{2(1-\cos\theta)}\left[\cos((N+1)\theta) \overset{-1+1}{-} \cos(\theta)\right] = -\frac{N}{2} - \frac{\cos((N+1)\theta) - 1}{2(1-\cos\theta)}$$

$$- \frac{1-\cos(\theta)}{2(1-\cos\theta)} = \frac{1-\cos((N+1)\theta)}{2(1-\cos\theta)} - \frac{N+1}{2}, \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Επιπλέον, έχουμε:

$$\mathcal{F}^N(t,x) = \frac{1}{2\pi(N+1)} + \frac{N}{2\pi(N+1)} + \frac{1}{\pi(N+1)}\left[-\frac{N+1}{2} + \frac{1-\cos((N+1)\theta)}{2(1-\cos\theta)}\right]$$

$$= \overbrace{\frac{N+1}{2\pi(N+1)} - \frac{N+1}{2\pi(N+1)}}^{0} + \frac{1}{2\pi(N+1)}\,\frac{1-\cos((N+1)\theta)}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi(N+1)}\,\frac{1-\cos((N+1)\theta)}{\underbrace{1-\cos\theta}_{>0}} \geq 0$$

$\forall \theta \in (0,2\pi)$
$\forall N \in \mathbb{N}$

20.8

Δ. Επειδή: $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \in T^n[-\pi,\pi]$ όταν $n \in \mathbb{N}$, έπεται ότι: $S_n\tau_j = \tau_j$ για $j=0,1,2$ και $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\tau_0 = \sqrt{2\pi}\,\varphi_0$, $\tau_1 = \sqrt{\pi}\,\varphi_1$, $\tau_2 = \sqrt{\pi}\,\varphi_2$, έπεται ότι: $\underbrace{S_0\tau_j = 0}_{\tau_1, \tau_2 \perp \varphi_0}$ όταν $j=1,2$ και $S_0\tau_0 = \tau_0$.

Έτσι: $L_N\tau_j = \frac{1}{N+1}\left(S_0\tau_j + N\cdot\tau_j\right) = \frac{S_0\tau_j}{N+1} + \frac{N}{N+1}\tau_j \quad \forall N \in \mathbb{N},\ j=0,1,2,$

από την οποία συνεπάγεται ότι:

$$\|L_N\tau_0 - \tau_0\|_\infty = \Big\|\frac{1}{N+1}\tau_0 + \overbrace{\frac{N}{N+1}\tau_0 - \tau_0}^{=0}\Big\|_\infty = 0 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$$

$$\|L_N\tau_j - \tau_j\|_\infty = \|\tau_j\|_\infty\left(1-\frac{N}{N+1}\right) = \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \text{για } j=1,2.$$

$$= \Big\|\frac{N}{N+1}\tau_j - \tau_j\Big\|_\infty$$

Έτσι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θ. Korovkin, που συνεπάγεται ότι: $\underbrace{L_N f}_{\in T^N[-\pi,\pi]} \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} f \quad \forall f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. ∎

20.9

Συνέπειες Θ. Weierstrass.

Πόρισμα: Έστω $X = (\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ με $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f,g \in C([-1,1];\mathbb{R})$, $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ τα πολυώνυμα Legendre και $Q_n = \frac{P_n}{\|P_n\|}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε το $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στο X.

Απόδειξη: Οι ιδιότητες των πολυωνύμων Legendre εξασφαλίζουν ότι το $(Q_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι ορθοκανονικό. Παρατηρούμε ότι: $\operatorname{span}\{Q_0, \dots, Q_n\} = \mathbb{P}^n[-1,1]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, που μας δίνει ότι: $\bigcup_{n=0}^{\infty} \operatorname{span}\{Q_0, \dots, Q_n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}^n[-1,1] = \mathbb{P}[-1,1]$. Από το Θ. Weierstrass το $\mathbb{P}[-1,1]$ είναι πυκνό στον $(\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ που συνεπάγεται ότι είναι πυκνό στον X επειδή η $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|$ ($\|f\| \le \sqrt{2}\,\|f\|_\infty$ για κάθε $f \in C([-1,1];\mathbb{R})$). ∎

Σημ. Έτσι: $\|f\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f, Q_n)|^2$ για κάθε $f \in C([-1,1];\mathbb{R})$, από την ισχύ της ισότητας Parseval. ∎

2.10

<u>Πόρισμα</u>: Έστω: $\mathcal{E}=(\mathbb{R}, C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ όπου $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f,g \in C_p([-1,1];\mathbb{R})$ και $S_n f = \sum_{\ell=0}^{2n} (f,\varphi_\ell)\varphi_\ell$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, όπου $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις που εμφανίστηκαν στην απόδειξη του τριγ. Θ. Weierstrass

Τότε: α). $\|S_n f - f\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\forall f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$

β). το $(\varphi_\ell)_{\ell=0}^{\infty}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα.

<u>Απόδειξη</u>: α) Έστω $f \in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$.

Επειδή το $S_n f$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $T^n[-\pi,\pi]$

και $L_n f = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k f \in T^n[-\pi,\pi]$ για κάθε <u>$n \in \mathbb{N}$</u>. Έτσι:

$$\|f - S_n f\| \le \|f - L_n f\| \le \sqrt{2\pi}\, \|f - L_n f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 .$$

β) $\bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{span}\{\varphi_0,\dots,\varphi_n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathrm{span}\{\varphi_0,\dots,\varphi_{2n}\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n[-\pi,\pi] = T[-\pi,\pi]$.

Από το Θ. Weierstrass το $T[-\pi,\pi]$ είναι πυκνό στον $(\mathbb{R}, C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$

άρκεια στον X καθώς η $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|$. Επιπλέον έχουμε δείξει ήδη ότι το $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ είναι ορθοκανονική. Έτσι το $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα στον X. ∎ | 20.11

Σημ: Από την ισότητα Parseval έπεται ότι:

$$\|f\|^2=\sum_{\ell=0}^{\infty}|(f,\varphi_\ell)|^2 \quad \forall f\in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}). \qquad \square$$

Πρόταση: Έστω $X=(\mathbb{R}, C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R}),+,\cdot,(\cdot,\cdot))$ με: $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f,g\in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$. Για κάθε $f\in C^1([-\pi,\pi];\mathbb{R})\cap C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ ισχύει ότι:

$$\|f-\acute{S}_n f\|\le \frac{\sqrt{2}\,\|f'\|}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Απόδειξη: Σημειώνουμε ότι: $\acute{S}_n f=\sum_{\ell=0}^{2n}(f,\varphi_\ell)\varphi_\ell$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Έστω $M,N\in\mathbb{N}$ με: $M>N$. Τότε:

$$\|\acute{S}_M f-\acute{S}_N f\|^2=\Big\|\sum_{\ell=2N+1}^{2M}(f,\varphi_\ell)\varphi_\ell\Big\|^2=\sum_{2N+1}^{2M}|(f,\varphi_\ell)|^2.$$

Επειδή: $\acute{S}_M f\xrightarrow[M\to+\infty]{\|\cdot\|} f$ έπεται

$$\lim_{M\to+\infty}\|\acute{S}_M f-\acute{S}_N f\|^2=\sum_{\ell=2N+1}^{\infty}|(f,\varphi_\ell)|^2 \Rightarrow \|f-\acute{S}_N f\|^2=\sum_{\ell=2N+1}^{\infty}|(f,\varphi_\ell)|^2.$$

20.12

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει:

$$(f,\varphi_{2k}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[f(t)\frac{\sin(kt)}{k}\Big|_{t=-\pi}^{t=\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\sin(kt)}{k}\,dt\right]$$

$$= -\frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\sin(kt)\,dt = -\frac{1}{k}(f',\varphi_{2k-1})$$

και

$$(f,\varphi_{2k-1}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[-f(t)\underbrace{\frac{\cos(kt)}{k}\Big|_{t=-\pi}^{\pi}}_{=0} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\frac{\cos(kt)}{k}\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{k}(f',\varphi_{2k}).$$

Έτσι: $$\sum_{l=2N+1}^{\infty} |(f,\varphi_l)|^2 \le \sum_{l=2N+1}^{\infty} \frac{2}{l^2}\|f'\|^2 = 2\|f'\|^2\sum_{l=2N+1}^{\infty} 1/l^2 \le \frac{2}{2N+1}\|f'\|^2$$

$\int_{2N+1}^{\infty} 1/x^2\,dx$

Βλ. Φροντιστήριο 2

$\le \sum_{l=N+1}^{\infty} |(f,\varphi_{2l-1})|^2 + |(f,\varphi_{2l})|^2$

Άρα: $\|f - S_N f\| \le \dfrac{\|f'\|\sqrt{2}}{\sqrt{2N+1}}$. ∎

Σημ.1. Για να αποδειχθεί καλύτερη τάξη σύγκλισης χρειαζόμαστε επιπλέον υποθέσεις για την f. π.χ. αν επιπλέον $f'(-\pi)=f'(\pi)$ και η f' είναι Lipschitz τότε: $\|f-S_nf\|_\infty = O\left(\frac{1}{n}\right)$ (βλ. Davis).

Σημ.2. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν $\sum_{\ell=0}^{\infty} |(f,\varphi_\ell)| < +\infty$ και $f\in C_p([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ τότε: $\|f-S_nf\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. (Η απόδειξη ομοιόμορφης σύγκλισης έγινε για τις απεικονίσεις $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ οι οποίες έχουν καλύτερη συμπεριφορά από τις κλασικές σειρές Fourier).

Σημ.3. Αν $f\in C_p^{k}([-\pi,\pi];\mathbb{R})$ δηλ. $f^{(\ell)}(\pi)=f^{(\ell)}(-\pi)$ $\ell=0,\dots,k$, τότε:

(Θ. Jackson)
$$\inf_{\tau\in T^n[-\pi,\pi]} \|f-\tau\|_\infty \leq \frac{C\,\|f^{(k)}\|_\infty}{(n+1)^k}. \qquad \blacksquare$$