21.0

Διάλεξη 21

(βίντεο)

ΜΕΜ 255 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

Καλά
Χριστούγεννα

21.1

Χαρακτηρισμός των βέλτιστων ομοιόμορφων προσεγγίσεων

Έστω $f \in C([a,b];\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση της f από ένα υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Επειδή, η $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι αυστηρά κυρτή δεν μπορούμε να συμπεράνουμε τη μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης από τα γενικά θεωρήματα που έχουμε αποδείξει.

Όταν ο υπόχωρος πεπερασμένης είναι ο $\mathbb{P}^n$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$, τότε η μοναδικότητα μπορεί να αποδειχθεί με βάση την ισχύ της συνθήκης του Haar.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $f \in C([a,b];\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ και $(x_j)_{j=0}^{n} \subset [a,b]$. Λέμε ότι τα σημεία $(x_j)_{j=0}^{n}$ είναι <u>σημεία εναλλαγής προσήμου</u> της f όταν ικανοποιούνται τα ακόλουθα:

α) $x_j < x_{j+1}$ για $j=0,\dots,n-1$, και

β) $f(x_j)f(x_{j+1}) < 0$ για $j=0,\dots,n-1$

■

21.2

Θεώρημα 1:

Έστω: $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C([a,b];\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^n[a,b]$ και $p \in \mathbb{P}^n[a,b]$ για το οποίο υπάρχουν σημεία $(x_j)_{j=0}^{n+1} \subset [a,b]$ τα οποία είναι σημεία εναλλαγής προσήμου της $f-p$ και επιπλέον: $|f(x_j)-p(x_j)| = \|f-p\|_\infty$, $j=0,\dots,n+1$. Τότε:

$$\|f-p\|_\infty = \min_{q \in \mathbb{P}^n[a,b]} \|f-q\|_\infty,$$ δηλ. το p είναι βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^n[a,b]$

Σημ. Όταν $f \in \mathbb{P}^n[a,b]$ η $f-p$ δεν μπορεί να έχει $n+2$ σημεία εναλλαγής προσήμου, διότι διαφορετικά θα είχε $n+1$ ρίζες και επομένως $f-p \equiv 0$ ∎

Απόδειξη: Θα κάνουμε απαγωγή σε άτοπο.

Έστω $q_0 \in \mathbb{P}^n[a,b]$, τέτοιο ώστε: $\|f-q_0\|_\infty < \|f-p\|_\infty$. Θέτουμε $d := \|f-p\|_\infty > 0$, $e_A = f-p$ και $e_B = f-q_0$. Επειδή τα $(x_j)_{j=0}^{n+1}$ είναι σημεία εναλλαγής προσήμου της e_A και $|e_A(x_j)| = d$ για $j=0,\dots,n+1$, έπεται ότι: $e_A(x_j) = (-1)^j \varepsilon d$ για $j=0,\dots,n+1$, όπου: $\varepsilon = \mathrm{sgn}(e_A(x_0))$. Επιπλέον: $\|f-q_0\|_\infty < d \Leftrightarrow \|e_B\|_\infty < d$

$\Leftrightarrow -d < e_B(x) < d \ \forall x \in [a,b]$.

21.3

Όταν $\varepsilon=1$ έχουμε:

$$(e_A-e_B)(x_k)=(-1)^k d-e_B(x_k)=\begin{cases} \overset{k \text{ άρτιος}}{d-e_B(x_k)>0} \\ \underset{k \text{ περιττός}}{-d-e_B(x_k)<0}\end{cases}$$ για $k=0,\dots,n+1$, και

όταν $\varepsilon=-1$ έχουμε:

$$(e_A-e_B)(x_k)=(-1)^{k+1} d-e_B(x_k)=\begin{cases} \overset{k \text{ άρτιος}}{-d-e_B(x_k)<0} \\ \underset{k \text{ περιττός}}{d-e_B(x_k)>0}\end{cases}$$ για $k=0,\dots,n+1$.

Άρα τα $(x_k)_{k=0}^{n+1}$ είναι σημεία εναλλαγής προσήμου για την e_A-e_B. Έτσι η e_A-e_B έχει $n+1$ τουλάχιστον διαφορετικές ρίζες στο $[a,b]$.

Όμως $e_A-e_B=q_0-p\in\mathbb{P}^n[a,b]$. Άρα: $q_0=p$ στο $[a,b]$ και έτσι:

$\|f-q_0\|_\infty=\|f-p\|_\infty$. Άτοπο

21.4

<u>Θεώρημα 2</u>: Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C([a,b];\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^n[a,b]$ και $p^* \in \mathbb{P}^n[a,b]$ βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^n[a,b]$. Τότε υπάρχουν σημεία $(x_j)_{j=0}^{n+1} \subset [a,b]$ τέτοια ώστε:

α) να είναι σημεία εναλλακτής προσήμου της $f-p^*$,

β) $|f(x_j)-p^*(x_j)| = \|f-p^*\|_\infty$ για $j=0,\dots,n+1$.

<u>Σημ.</u>: $\|f-p^*\|_\infty > 0$ επειδή $f \notin \mathbb{P}^n[a,b]$.

<u>Απόδειξη</u>:

Α. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία $y_0, y_1 \in [a,b]$ τ.ω. $|f(y_j)-p^*(y_j)| = \|f-p^*\|_\infty$ για $j=0,1$, και $(f-p^*)(y_0)\cdot(f-p^*)(y_1) < 0$.

Επειδή η $|f-p^*|$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ έπεται ότι υπάρχει $y_0 \in [a,b]$ τ.ω. $|f(y_0)-p^*(y_0)| = \max\limits_{[a,b]} |f-p^*| = \|f-p^*\|_\infty$.

Μένει να βρούμε: $y_1 \in [a,b]$ τ.ω. $f(y_1)-p^*(y_1) = -(f(y_0)-p^*(y_0))$.

21.5

Ξεκινάμε με τη διαπίστωση ότι:

$$-\|f-p^*\|_\infty \leq f(y)-p^*(y) \leq \|f-p^*\|_\infty \quad \forall y\in[a,b].$$

$\underline{\Pi 1}$: $f(y_0)-p^*(y_0)=\|f-p^*\|_\infty>0$. Ας υποθέσουμε ότι: $\boxed{m:=\min_{y\in[a,b]}\left(f(y)-p^*(y)\right) > -\|f-p^*\|_\infty.}$
(απαγωγή σε άτοπο!)

Στη συνέχεια εισάγουμε τη βοηθητική σταθερά: $c:=\frac{1}{2}\left(\|f-p^*\|_\infty+m\right)>0$
και παρατηρούμε ότι:

$$c-\|f-p^*\|_\infty = m-c \leq f(y)-p^*(y)-c \leq \|f-p^*\|_\infty - c = \underbrace{\frac{\|f-p^*\|_\infty-m}{2}}_{>0} \quad \forall y\in[a,b]$$

Σημ. $\|f-p^*\|_\infty=m$ σημαίνει $f-p^*=$ σταθ. και επομένως $f\in\mathbb{P}^n[a,b]$, δηλ. άτοπο.

$$\Rightarrow \quad |f(y)-p^*(y)-c| \leq \|f-p^*\|_\infty - c \quad \forall y\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \quad \|f-\underbrace{(p^*+c)}_{\in\mathbb{P}^n[a,b]}\|_\infty \leq \|f-p^*\|_\infty - c < \|f-p^*\|_\infty \qquad \text{Άτοπο}$$

Έτσι $m=-\|f-p^*\|_\infty$, που σημαίνει ότι υπάρχει $y_1\in[a,b]$ τ.ω.

$$f(y_1)-p^*(y_1) = -\|f-p^*\|_\infty = -\left[f(y_0)-p^*(y_0)\right].$$

21.6

$\underline{\Pi_2}$. $f(y_0) - p^*(y_0) = -\|f-p^*\|_\infty < 0$.

Ας υποθέσουμε ότι: $\max\limits_{y\in[a,b]} [f(y)-p^*(y)] < \|f-p^*\|_\infty$
(απαγωγή σε άτοπο)

$$\Leftrightarrow \quad m := \min_{y\in[a,b]} [p^*(y) - f(y)] > -\|f-p^*\|_\infty.$$

Θέτουμε: $c = \frac{1}{2}(m + \|f-p^*\|_\infty)$ και έχουμε τα ακόλουθα:

$$c - \|f-p^*\|_\infty = m - c \le p^*(y) - f(y) - c \le \|f-p^*\|_\infty - c \quad \forall y\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \quad |p^*(y) - f(y) - c| \le \|f-p^*\|_\infty - c \quad \forall y\in[a,b]$$

$$\Rightarrow \quad \|f - \underbrace{(p^* - c)}_{\in P^n[a,b]}\|_\infty \le \|f-p^*\|_\infty - c < \|f-p^*\|_\infty \quad \text{Άτοπο}$$

Έτσι υπάρχει $y_1 \in [a,b]$ τ.ω. $p^*(y_1) - f(y_1) = -\|f-p^*\|_\infty = f(y_0) - p^*(y_0)$

Δηλ. $f(y_1) - p^*(y_1) = -[f(y_0) - p^*(y_0)]$.

21.7

Β. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν σημεία $(y_j)_{j=0}^{N} \subset [a,b]$ εναλλαγής προσήμου της $f-p^*$ τ.ω. $|f(y_j)-p^*(y_j)| = \|f-p^*\|_\infty$ για $j=0,\dots,N$, με: $N \geq n+1$. Έχουμε ήδη δείξει ότι: $N \geq 1$, που καλύπτει την περίπτωση $n=0$. Έστω $n \geq 1$. Ο σκοπός μας είναι να αποκλείσουμε την περίπτωση $N \leq n$, κάνοντας απαγωγή σε άτοπο.

Γ. Έστω ότι $1 \leq N \leq n$ και $g = f-p^*$. Επειδή $g \in C([a,b];\mathbb{R})$ έπεται: ότι η g είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. Έτσι υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. $|g(x)-g(y)| < \frac{1}{2}\|g\|_\infty$ για κάθε $x,y \in [a,b]$ με: $|x-y|<\delta$.

Έστω: $\nu \in \mathbb{N}$ τ.ω. $\Delta x = \frac{b-a}{\nu+1} < \delta$, μια ομοιόμορφη διαμέριση του $[a,b]$ με κόμβους $\tau_\ell := a + \ell \Delta x$ για $\ell = 0,\dots,\nu+1$, και $I_\ell := [\tau_\ell, \tau_{\ell+1}]$ για $\ell=0,\dots,\nu$.

Έστω $I \in (I_\ell)_{\ell=0}^{\nu}$ και $t \in I$ με: $|g(t)| = \|g\|_\infty$. Τότε:

$$\mathrm{sgn}(g(x)) = \mathrm{sgn}(g(t)) \quad \forall x \in I.$$

Ας εξηγήσουμε γιατί συμβαίνει αυτό. 21.8

Για κάθε $x \in I$ έχουμε: $|t-x| \leqslant \Delta x < \delta$ και επομένως

$$|g(t)-g(x)| < \frac{1}{2}\|g\|_\infty$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\|g\|_\infty + g(t) < g(x) < g(t) + \frac{1}{2}\|g\|_\infty$$

Όταν $g(t)>0$ τότε: $g(t)=\|g\|_\infty$ και $g(x) > \frac{1}{2}\|g\|_\infty > 0 \quad \forall x \in I$.

Όταν $g(t)<0$ τότε: $g(t)=-\|g\|_\infty$ και $g(x) < -\frac{1}{2}\|g\|_\infty < 0 \quad \forall x \in I$.

"θετικό"

Ένα διάστημα $I \in (I_e)_{e\in\check{D}}$ λέμε ότι είναι ένα θ-διάστημα όταν

"αρνητικό"

υπάρχει $t \in I$ τ.ω. $g(t)=\|g\|_\infty$, ότι είναι ένα α-διάστημα όταν

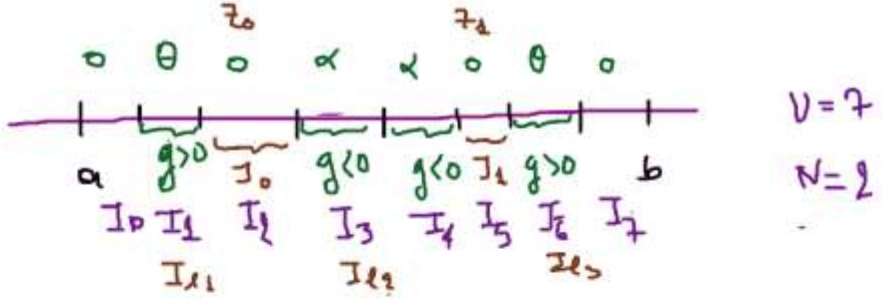
υπάρχει $t\in I$ τ.ω. $g(t)=-\|g\|_\infty$. και ότι είναι ένα ο-διάστημα

"ουδέτερο"

όταν δεν είναι θ-διάστημα ή α-διάστημα.

21.9

Επειδή $N \geq 1$ υπάρχει τουλάχιστον ένα θ-διάστημα και τουλάχιστον ένα α-διάστημα. Επειδή ένα θ-διάστημα και ένα α-διάστημα δεν μπορούν να είναι συνεχόμενα, θα υπάρχει ανάμεσά τους ένα τουλάχιστον ο-διάστημα. Έτσι τα $(J_\ell)_{\ell=0}^{\nu}$ χωρίζονται σε α-, θ- και ο- διαστήματα.



Έστω I_A το πρώτο α- ή θ-διάστημα και I_B το τελευταίο α- ή θ-διάστημα. Μπορούμε να βρούμε N ο-διαστήματα $(J_k)_{k=0}^{N-1}$ τα οποία να διαχωρίζουν τα θ-διαστήματα από τα διαστήματα, δηλ. ανάμεσα σα J_k και J_{k+1} υπάρχουν μόνο α-διαστήματα και ο-διαστήματα ή μόνο θ-διαστήματα και ο-διαστήματα, το ίδιο συμβαίνει πριν το J_0 και μετά το J_{N-1}.

Στη συνέχεια διαλέγουμε: $z_j \in J_j$ για $j=0,\dots,N-1$. 21.10

Αν το I_A είναι θ-διάστημα τότε θέτουμε:

$$\hat{q}(x) = \prod_{k=0}^{N-1} (z_k - x) \quad \in \mathbb{P}^N[a,b] \subset \mathbb{P}^n[a,b]$$

και αν I_B είναι α-διάστημα τότε θέτουμε

$$\hat{q}(x) = -\prod_{k=0}^{N-1} (z_k - x). \quad \in \mathbb{P}^N[a,b] \subset \mathbb{P}^n[a,b].$$

Έτσι: $g(x)\cdot\hat{q}(x) > 0 \quad \forall x \in I$ όταν I είναι ένα α-διάστημα ή θ-διάστημα.

Έστω R να είναι η ένωση των 0-διαστημάτων. Τότε:

$$\hat{C} := \max_{x\in R} |g(x)| < \|g\|_\infty.$$

Ακόμα, έστω $\lambda > 0$ τ.ω. $\lambda\|\hat{q}\|_\infty < \min\left\{\frac{\hat{C}}{2}, \|g\|_\infty - \hat{C}\right\}$, και $q_\lambda = p^* + \lambda\hat{q} \in \mathbb{P}^n[a,b]$. Θα δείξουμε ότι: $\|f - q_\lambda\|_\infty < \|g\|_\infty$, το οποίο θα οδηγήσει σε άτοπο.

21.11

Έστω $I \in (I_\ell)_{\ell=0}^{\nu}$ και $x \in I$.

Περ. 1 Όταν το I είναι ένα θ-διάστημα τότε: $g(x) > \frac{1}{2}\|g\|_\infty$.

Και όταν το I είναι ένα α-διάστημα τότε: $g(x) < -\frac{1}{2}\|g\|_\infty$.

Άρα όταν I είναι α-διάστημα ή θ-διάστημα έχουμε:

$$|g(x)| > \frac{1}{2}\|g\|_\infty > \frac{1}{2}\hat{c} \geq \lambda\|\hat{q}\|_\infty.$$

Επιπλέον έχουμε:

$$|f(x)-q_\lambda(x)| = \underbrace{|g(x)-\lambda\hat{q}(x)|}_{\substack{g(x),\ \lambda\hat{q}(x) \\ \text{ομόσημα} \\ \text{και} \\ |g(x)| > \lambda\|\hat{q}\|_\infty \geq \lambda|\hat{q}(x)|}} = \begin{cases} \big|\,|g(x)|-\lambda|\hat{q}(x)|\,\big| & g(x)>0 \\ \big|-|g(x)|+\lambda|\hat{q}(x)|\,\big| & g(x)<0 \end{cases} = \big|\,|g(x)|-\lambda|\hat{q}(x)|\,\big| = |g(x)|-\lambda|\hat{q}(x)|$$

$$\leq \|g\|_\infty - \underbrace{\lambda|\hat{q}(x)|}_{>0} < \|g\|_\infty.$$

Περ. 2

Έστω ότι το I είναι ο-διάστημα. Τότε $x \in R$. Έτσι:

$$|f(x)-q_\lambda(x)| = |g(x)-\lambda\hat{q}(x)| \leq |g(x)| + \lambda|\hat{q}(x)| \leq \hat{c}+\lambda\|\hat{q}\|_\infty < \hat{c}+\|g\|_\infty-\hat{c} < \|g\|_\infty.$$

Άτοπο

Έτσι καταλήξαμε στο συμπέρασμα $|f(x)-q_\lambda(x)| < \|g\|_\infty \ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \|f-q_\lambda\|_\infty < \|g\|_\infty$ ∎

21.12

Πόρισμα

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$, $f \in C([a,b];\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^n[a,b]$ και $p^* \in \mathbb{P}^n[a,b]$ μιά βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^n[a,b]$ ως πρός τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Τότε η p^* είναι μοναδική.

Απόδειξη. Έστω $q^* \in \mathbb{P}^n[a,b]$ μια βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^n[a,b]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Τότε (κυρτότητα του συνόλου των βέλτιστων προσεγγίσεων) το $w^* = \frac{1}{2}(q^* + p^*)$ είναι επίσης βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^n[a,b]$. (επειδή $f \notin \mathbb{P}^n[a,b]$) Άρα υπάρχουν σημεία $(x_j)_{j=0}^{n+1} \subset [a,b]$ εναλλάξ προσήμου της $f - w^*$ τ.ω. $|f(x_j) - w^*(x_j)| = \|f - p^*\|_\infty$ για $j=0,\dots,n+1$. Αν $\varepsilon \in \{+1,-1\}$ είναι το πρόσημο της $f(x_0) - w^*(x_0)$, τότε καταλήγουμε στην ισότητα:

$$\frac{1}{2}\left[f(x_k) - p^*(x_k)\right] + \frac{1}{2}\left[f(x_k) - q^*(x_k)\right] = \varepsilon(-1)^k \|f - p^*\|_\infty, \; k=0,\dots,n+1$$

Θέτουμε: $A_k = f(x_k) - p^*(x_k)$ και $B_k := f(x_k) - q^*(x_k)$ για $k=0,\dots,n+1$.

21.13

Έτσι: $A_k + B_k = 2\varepsilon(-1)^k \|f-p^*\|_\infty$ για $k=0,\dots,n+1$.

Θα δείξουμε ότι: $A_k = B_k$ για $k=0,\dots,n+1$, λαμβάνοντας υπόψιν ότι:
$\|f-p^*\|_\infty = \|f-q^*\|_\infty \geq \max\{A_k, B_k\}$ για $k=0,\dots,n+1$.

Περ. 1 $\varepsilon(-1)^k = 1$ και $k \in \{0,\dots,n+1\}$

Αν $A_k \neq B_k$ τότε: $2\|f-p^*\|_\infty \geq 2\max\{A_k,B_k\} > A_k + B_k = 2\|f-p^*\|_\infty$

Άτοπο.

Περ. 2 $\varepsilon(-1)^k = -1$ και $k \in \{0,\dots,n+1\}$

Αν $A_k \neq B_k$ τότε: $-2\|f-p^*\|_\infty = A_k + B_k > 2\min\{A_k, B_k\} \geq -2\|f-p^*\|_\infty$

Άτοπο.

Έτσι: $f(x_k) - p^*(x_k) = f(x_k) - q^*(x_k) = \varepsilon(-1)^k \|f-p^*\|_\infty$ για $k=0,\dots,n+1$

Άρα: $q^*(x_k) - p^*(x_k) = 0$ για $k=0,\dots,n+1$, και το p^*-q^* έχει $n+2$ ρίζες ενώ ανήκει στο $\mathbb{P}^n[a,b]$. Άρα: $p^*-q^* \equiv 0$ ή $p^*=q^*$. ∎

<u>Σημ.</u> Τα δύο θεωρήματα που αποδείξαμε οφείλονται στο Kirchberger (1902) και το πόρισμα στον Haar.

21.14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1:

Έστω $f \in C([a,b];\mathbb{R})$. Τότε η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση $p^* \in \mathbb{P}^0[a,b]$ της f από τον $\mathbb{P}^0[a,b]$ είναι: $p^*(t) = c^* := \frac{1}{2}\left[\max_{[a,b]} f + \min_{[a,b]} f\right] \ \forall t \in [a,b]$.

Λύση

Όταν $f \in \mathbb{P}^0[a,b]$, τότε υπάρχει c τ.ω. $f(t) = c \ \forall t \in [a,b]$.

Άρα: $\max_{[a,b]} f = \min_{[a,b]} f = c$ και $c^* = c$. Επιπλέον, $p^*(t) = f(t) = c \ \forall t \in [a,b]$.

Έτσι: $p^*(t) = c^* \ \forall t \in [a,b]$.

Έστω: $f \notin \mathbb{P}^0[a,b]$. Υπάρχουν $z_0, z_1 \in [a,b]$ τ.ω. $f(z_0) = \min_{[a,b]} f$ και $f(z_1) = \max_{[a,b]} f$. Επιπλέον ισχύει: $f(z_0) < f(z_1)$. Τότε: $f(z_1) - c^* = \frac{f(z_1) - f(z_0)}{2}$

και $f(z_0) - c^* = \frac{f(z_0) - f(z_1)}{2}$. Άρα τα z_0, z_1 είναι σημεία εναλλαγής προσήμου της $f - c^*$ και $|f(z_1) - c^*| = |f(z_0) - c^*| = \frac{f(z_1) - f(z_0)}{2}$.

21.15

Μένει να δείξουμε ότι: $\|f-c^*\|_\infty = \frac{f(z_1)-f(z_0)}{2} = d$. Ήδη: $\|f-c^*\|_\infty \geq d$.

Έστω $x\in[a,b]$. Όταν $f(x)\geq c^*$ τότε: $|f(x)-c^*| = f(x)-c^* \leq f(z_1)-c^* = d$.

Όταν $f(x)<c^*$ τότε: $|f(x)-c^*| = c^*-f(x) \leq c^*-f(z_0) = d$. Έτσι: $\|f-c^*\|_\infty \leq d$.

Τελικά $\|f-c^*\|_\infty = d$. Έτσι: $p^*(t)=c^*$ $\forall t\in[a,b]$. ∎

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2:

(άρα: $f\notin \mathbb{P}^1[a,b]$).

Έστω $f\in C^2([a,b];\mathbb{R})$ με: $f''(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε $p^*\in\mathbb{P}^1[a,b]$ τ.ω. $\|f-p^*\|_\infty = \min_{q\in\mathbb{P}^1[a,b]} \|f-q\|_\infty$.

Έστω: $p^*(t)=\gamma t+\delta$ $\forall t\in[a,b]$ και $g(t)=f(t)-p^*(t)$ $\forall t\in[a,b]$. Αναγκαστικά υπάρχουν $(x_j)_{j=0}^{2}\subset[a,b]$ στα οποία έχουμε εναλλαγή προσήμου της g και επιπλέον $|g(x_j)|=\|g\|_\infty$ για $j=0,1,2$. Όταν $|g(t_0)|=\|g\|_\infty$ για κάποιο $t_0\in[a,b]$, τότε: $g(t_0)=\|g\|_\infty$ και $g(t_0)=-\|g\|_\infty$, δηλ. το t_0 είναι σημείο ολικού μεγίστου ή ολικού ελαχίστου της g στο $[a,b]$. Όταν $t_0\in(a,b)$ τότε: $g'(t_0)=0 \Leftrightarrow f'(t_0)=\gamma$. Επιπλέον $t_0\in\{a,b\}$.

Έτσι αναγκαστικά $x_1 \in (a,b)$ και $f'(x_1)=\gamma$. Έστω ότι για κάποιο $\xi \in (\alpha,\beta)$ | 21.16

έχουμε: $|g(\xi)| = \|g\|_\infty$. Τότε: $f'(\xi)=\gamma$ και από το Θ. Rolle υπάρχει θ ανάμεσα στα x_1, ξ τ.ω. $f''(\theta)=0$, που οδηγεί σε άτοπο. Άρα: $x_0, x_2 \notin (\alpha,b)$ και συνεπώς $x_0=a$ και $x_2=b$. Ας εντοπίσουμε τα γ, δ, x_1. Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>Περίπτωση 1</u>: $g(x_1)>0$. Τότε: $g(x_0)=g(a)<0$ και $g(x_2)=g(b)>0$.

Επομένως: $|g(a)|=|g(b)|$ και $|g(a)|=|g(x_1)| \iff -g(a)=-g(b)$ και $g(x_1)=-g(a)$

$\iff f(a)-\gamma a-\delta = f(b)-\gamma b-\delta$ και $f(a)-\gamma a-\delta = -f(x_1)+\gamma x_1+\delta$

$\iff f(b)-f(a)=\gamma(b-a)$ και $2\delta = [f(x_1)+f(a)]-\gamma(x_1+a)$

$$\iff \gamma = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{και} \quad \delta = \frac{f(x_1)+f(a)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{x_1+a}{2}.$$

<u>Περίπτωση 2</u>: $g(x_1)<0$. Τότε: $g(x_0)=g(a)>0$ και $g(x_2)=g(b)>0$.

Επομένως: $|g(a)|=|g(b)|$ και $|g(x_1)|=|g(a)| \iff g(a)=g(b)$ και $-g(x_1)=g(a)$ που οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

21.17.

Για τον προσδιορισμό του x_1 χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$f'(x_1)=\gamma \Leftrightarrow f'(x_1)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

<u>Σημ 1</u>. Παρατηρούμε ότι: $\min_{[a,b]} f'(b-a) < \int_a^b f'(t)dt < (b-a)\max_{[a,b]} f'$

δεν ισχύουν οι ισότητες επειδή η f' δεν είναι σταθερή συνάρτηση.

Άρα: $\min_{[a,b]} f' < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < \max_{[a,b]} f'$.

$\Rightarrow f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$.

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ τω. $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. (Θ. ενδιάμεσης τιμής) ■

<u>Σημ 2</u>. Έστω $f(t)=e^t$ $\forall t\in[0,1]$. Τότε $f''(t)=e^t>0$ $\forall t\in[0,1]$ και όσα είπαμε πιο πάνω εφαρμόζονται. Έτσι $e^{x_1}=\frac{e^1-e^0}{1-0} \Leftrightarrow e^{x_1}=e-1$

$\Leftrightarrow x_1=\ln(e-1)\simeq 0.5413.$ ■