22.0

Διάλεξη 22

(βίντεο)

ΜΕΜ 255 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

22.1

Πολυώνυμα Chebyshev

Ορισμός: Τα πολυώνυμα Chebyshev (α' είδους) ορίζονται από τον τύπο:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad \forall x \in [-1,1], \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Πρόταση:

α) $T_0(t) = 1 \ \forall t \in [-1,1]$, $T_1(t) = t \ \forall t \in [-1,1]$ και $T_{n+1}(t) = 2t T_n(t) - T_{n-1}(t) \ \forall t \in [-1,1], \forall n \in \mathbb{N}$.

β) $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \quad \forall \theta \in [0,\pi] \ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

γ) $T_0 \in \mathbb{P}^0[-1,1]$

δ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $T_n \in \mathbb{P}^n[-1,1] \setminus \mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$ και 2^{n-1} είναι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου του T_n.

Απόδειξη:

α) Για $n=0$, έχουμε: $T_0(t) = \cos(0) = 1$ για κάθε $t \in [-1,1]$. Επιπλέον, για $n=1$, έχουμε:
$T_1(t) = \cos(\arccos(t)) = t$ για κάθε $t \in [-1,1]$.
Το επόμενο βήμα είναι να επαληθεύσουμε τον αναδρομικό τύπο. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$T_{n+1}(t) + T_{n-1}(t) = \cos((n+1)\arccos(t)) + \cos((n-1)\arccos(t))$$

22.2

$$= 2\cos\left[\frac{(n+1)\arccos(t)+(n-1)\arccos(t)}{2}\right]\cos\left[\frac{(n+1)\arccos(t)-(n-1)\arccos(t)}{2}\right]$$

$$= 2\cos(n\arccos(t))\cos(\arccos(t)) = 2t\,T_n(t)\quad \forall t\in[-1,1].$$

β) Έστω $\theta\in[0,\pi]$. Επειδή: $\arccos:[-1,1]\xrightarrow[\text{επί}]{1-1}[0,\pi]$, έπεται ότι: $\arccos(\cos\theta)=\theta$.

Επομένως: $T_n(\cos\theta)=\cos(n\arccos(\cos\theta))=\cos(n\theta)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$.

γ) Προφανώς $T_0\equiv 1\in\mathbb{P}^0[-1,1]$.

22.3

δ) Η απόδειξη θα γίνει με μαθηματική επαγωγή.

Βήμα 1: Όταν $n=1$, τότε $T_1(t)=t$ $\forall t\in[-1,1]$. Έτσι: $T_1 \in \mathbb{P}^1[-1,1] \setminus \mathbb{P}^0[-1,1]$. Επιπλέον, ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου είναι ίσος με: $1 = 2^{1-1} = 2^{n-1}$.

Βήμα 2: Έστω ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}$, ισχύει: $T_k \in \mathbb{P}^k[-1,1] \setminus \mathbb{P}^{k-1}[-1,1]$ με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 2^{k-1} για $k=1,\dots,n$. Ο αναδρομικός τύπος μας δίνει: $T_{n+1}(t) = 2t\,T_n(t) - T_{n-1}(t)$. Επειδή $T_n(t) = 2^{n-1}t^n + q(t)$ για κάποιο $q\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$ και $T_{n-1}(t)\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$, έπεται:

$$T_{n+1}(t) = 2t\left[2^{n-1}t^n + q(t)\right] - T_{n-1}(t) = 2^{(n+1)-1}t^{n+1} + \underbrace{\left[2tq(t) - T_{n-1}(t)\right]}_{\in \mathbb{P}^n[-1,1]}.$$

Άρα: $T_{n+1} \in \mathbb{P}^{n+1}[-1,1] \setminus \mathbb{P}^n[-1,1]$ και $2^{(n+1)-1}$ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβαθμίου όρου. ■

22.4

Πρόταση:

α) $\|T_n\|_\infty = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.

β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το T_n λαμβάνει ακρότατες τιμές μόνο στα $n+1$ σημεία:

$$s_j^{(n)} := \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right) \quad j = 0, \dots, n$$

γ) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το T_n έχει στο $[-1,1]$ n διαφορετικές ρίζες οι οποίες δίνονται από τον τύπο: $t_j^{(n)} := \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$ για $j = 1, \dots, n$.

Απόδειξη:

α) Έστω $n \in \mathbb{N}_0$. Τότε: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ $\forall x \in [-1,1]$. Επομένως $\|T_n\|_\infty = \max\limits_{x \in [-1,1]} |\cos(n \arccos(x))| \leq 1$. Παρατηρούμε ότι: $T_n(1) =$
$= \cos(n \cdot \arccos(1)) = \cos(n \cdot 0) = \cos(0) = 1$! Έτσι: $\|T_n\|_\infty \geq |T_n(1)| = 1$.

Τελικά $\|T_n\|_\infty = 1$.

22.5

β) Επειδή $|T_n(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $n \in \mathbb{N}$, οι ακρότατες τιμές του T_n λαμβάνονται στα σημεία του $[-1,1]$ στα οποία η τιμή είναι $+1$ ή -1.

(Όταν $n=0$, έχουμε: $T_0(x)=1$ για κάθε $x \in [-1,1]$. Άρα το T_0 λαμβάνει ακρότατη τιμή σε όλα τα σημεία του $[-1,1]$.)

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αναζητούμε $x_0 \in [-1,1]$ τ.ω. $|T_n(x_0)| = 1$. Προφανώς υπάρχει μοναδικό $\theta_0 \in [0,\pi]$ τ.ω. $x_0 = \cos(\theta_0)$. Έτσι: $|T_n(x_0)| = 1 \Leftrightarrow |T_n(\cos\theta_0)| = 1 \Leftrightarrow |\cos(n\theta_0)| = 1$
$\Leftrightarrow \cos(n\theta_0) = \pm 1$

Άρα: $n \cdot \theta_0 = j\pi$ για κάποιο $j \in \mathbb{Z}$. Επειδή $\theta_0 \in [0,\pi]$, έχουμε: $0 \leq \frac{j\pi}{n} \leq \pi \Leftrightarrow$ $j \geq 0$ και $j \leq n$. Άρα $\theta_0 = \frac{j\pi}{n}$ για $j=0,\dots,n$, και τα $S_j^{(n)} = \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ $j=0,\dots,n$, είναι τα μόνα στοιχεία του $[-1,1]$ στα οποία το T_n λαμβάνει ακρότατη τιμή.
Επειδή: $\frac{j\pi}{n} \in [0,\pi]$ για $j=0,\dots,n$, και η συνάρτηση $\cos(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$, έπεται ότι: $S_j^{(n)} > S_{j+1}^{(n)}$ για $j=0,\dots,n-1$. Άρα τα $(S_j^{(n)})_{j=0}^{n}$ είναι ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους.

22.6

γ) Έστω: $n\in\mathbb{N}$. Ψάχνουμε: $x_0\in[-1,1]$ τ.ω. $T_n(x_0)=0$. Επειδή $x_0=\cos(\theta_0)$ για ένα μόνο $\theta_0\in[0,\pi]$, έχουμε: $T_n(x_0)=0 \iff T_n(\cos(\theta_0))=0 \iff \cos(n\theta_0)=0$.

Άρα: $n\theta_0=(2k-1)\pi/2$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. Έτσι: $0\le\frac{2k-1}{2n}\pi\le\pi \iff (k\ge 1$ και $k\le n)$.

Έτσι: $\theta_0=\frac{2k-1}{2n}\pi$ για $k=1,\dots,n$, και τα $\tau_k^{(n)}:=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$ με $k=1,\dots,n$, είναι ρίζες του T_n. Επειδή $\frac{2k-1}{2n}\pi\in[0,\pi]$ για $k=1,\dots,n$ και η $\cos(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\pi]$ έπεται ότι: $\tau_{k+1}^{(n)}>\tau_k^{(n)}$ για $k=1,\dots,n-1$.

Άρα οι ρίζες είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους και ανήκουν όλες στο $[-1,1]$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ: Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θέτουμε: $\hat{T}_n:=2^{1-n}T_n\in\hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]$ και ορίζουμε $w_n\in\hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]$ με: $w_n(t)=t^n\ \forall t\in[-1,1]$. Τότε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ισχύει ότι:

α) Η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της w_n από τον $\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$ είναι το πολυώνυμο $w_n-\hat{T}_n$ και $\inf\limits_{z\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]}\|w_n-z\|_\infty=\|\hat{T}_n\|_\infty=2^{1-n}$

β) Για κάθε $q\in\hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]$ με: $q\ne\hat{T}_n$ ισχύει: $\|q\|_\infty>\|\hat{T}_n\|_\infty$.

Σημ. $\hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]:=\{p\in\mathbb{P}^n[-1,1]:\ \exists q\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$ τ.ω. $p=w_n+q\}$.

<u>Απόδειξη:</u>

22.7

A. Έστω: $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\|T_n\|_\infty = 1$, έπεται: $\|\hat{T}_n\|_\infty = \|2^{1-n} T_n\|_\infty = 2^{1-n} \|T_n\|_\infty = 2^{1-n}$.

B. Έστω $z^* = w_n - \hat{T}_n \in \mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το z^* είναι η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της w_n από τον $\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$.

Ορίζουμε: $g := w_n - z^*$, άρα $g = \hat{T}_n$. Έχουμε δει ότι $\|g\|_\infty = 2^{1-n}$. Επιπλέον, στα $n+1$ σημεία $\xi_j^{(n)} := \cos\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ με: $j = 0, \dots, n$, έχουμε $g(\xi_j^{(n)}) = \hat{T}_n(\xi_j^{(n)}) = 2^{1-n} T_n(\xi_j^{(n)})$ $= 2^{1-n} \cos(j\pi) = (-1)^j 2^{1-n}$ για $j = 0, \dots, n$. Άρα τα $(\xi_j^{(n)})_{j=0}^{n}$ είναι $n+1$ σημεία εναλλαγής προσήμου για την g και $|g(\xi_j^{(n)})| = 2^{1-n} = \|g\|_\infty$. Άρα το z^* είναι η (μοναδική) βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της w_n από τον $\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$. Προφανώς:

$$\inf_{z \in \mathbb{P}^{n-1}[-1,1]} \|w_n - z\|_\infty = \|w_n - z^*\|_\infty = \|\hat{T}_n\|_\infty = 2^{1-n}.$$

22.8

Γ. Παρατηρώντας ότι: $\inf\limits_{q\in\hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]} \|q\|_\infty = \inf\limits_{z\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]} \|w_n - z\|_\infty$, καταλήγουμε στο

συμπέρασμα ότι: $\|q\|_\infty \geq \|\hat{T}_n\|_\infty \quad \forall q \in \hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]$. Ας υποθέσουμε ότι

υπάρχει $q_0 \in \hat{\mathbb{P}}^n[-1,1]$ τ.ω. $\|q_0\|_\infty = \|\hat{T}_n\|_\infty$. Τότε θα έχουμε τα ακόλουθα:

$$\|w_n - \underbrace{(w_n - q_0)}_{\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]}\|_\infty = \|\hat{T}_n\|_\infty = \inf_{z\in\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]} \|w_n - z\|_\infty$$

που σημαίνει ότι το $w_n - q_0$ είναι μια βέλτιστη προσέγγιση του w_n από

τον $\mathbb{P}^{n-1}[-1,1]$. Επειδή είναι μοναδική, έπεται: $w_n - q_0 = w_n - \hat{T}_n \Rightarrow q_0 = \hat{T}_n$. ∎

ένα min-max πρόβλημα

22.9

Παράδειγμα:

Βρείτε $q \in \mathbb{P}^2[-1,1]$ τ.ω $\max_{t\in[-1,1]} |t^3 - q(t)| = \min_{z\in\mathbb{P}^2[-1,1]} \max_{t\in[-1,1]} |t^3 - z(t)|$

Με βάση το τελευταίο Θεώρημα το ζητούμενο q ικανοποιεί:

$$q(t) = t^3 - \hat{T}_3(t) = t^3 - 2^{1-3} T_3(t) = t^3 - \frac{1}{4} T_3(t).$$

Με βάση τον αναδρομικό τύπο έχουμε:

$$T_3(t) = 2t\,T_2(t) - T_1(t) = 2t\left(2t\,T_1(t) - T_0(t)\right) - t$$

$$= 4t^2 \cdot t - 2t - t = 4t^3 - 3t$$

Έτσι: $q(t) = t^3 - \frac{1}{4}\left(4t^3 - 3t\right) = t^3 - \left(t^3 - \frac{3}{4}t\right) = \frac{3}{4}t.$ $\square$

22.10

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μια ιδιότητα ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Chebyshev.

<u>Λήμμα</u> Έστω: $w:(-1,1)\longrightarrow(0,+\infty)$ με:
$$w(x)=(1-x^2)^{-1/2}\quad \forall x\in(-1,1).$$
και $f\in C([-1,1];\mathbb{R})$. Τότε $\int_{-1}^{1} w(x)f(x)\,dx$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω: $\varepsilon\in(0,1)$. Τότε:
$$\int_0^{\varepsilon} w(x)f(x)dx=\int_0^{\varepsilon}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\int_{\pi/2}^{\arccos\varepsilon}\frac{f(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\overset{>0}{\sin\theta}\,d\theta=\int_{\arccos\varepsilon}^{\pi/2}f(\cos\theta)\,d\theta\xrightarrow[\varepsilon\to 1^-]{}\int_0^{\pi/2}f(\cos\theta)\,d\theta$$
$x=\cos\theta$
ή
$\theta=\arccos x$

22.11

Επίσης: $\displaystyle\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int_{\arccos(-\varepsilon)}^{\pi/2} \frac{f(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}\sin\theta\,d\theta = \int_{\pi/2}^{\arccos(-\varepsilon)} f(\cos\theta)\,d\theta$

$x=\cos\theta$

$\theta=\arccos(x)$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 1^-]{} \int_{\pi/2}^{\pi} f(\cos\theta)\,d\theta .$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω $X=(\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}),+,\cdot,\langle\cdot,\cdot\rangle_w)$ όπου: $\langle f,g\rangle_w := \int_{-1}^{1} w(t)f(t)g(t)dt$ για κάθε $f,g\in C([-1,1];\mathbb{R})$ και $w:(-1,1)\to(0,+\infty)$ με: $w(t)=(1-t^2)^{-1/2}$ για κάθε $t\in(-1,1)$. Αν $(T_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι τα πολυώνυμα Chebyshev τότε:

$$\langle T_n,T_m\rangle_w = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ \pi/2 & n=m=0 \\ \pi & n=m \text{ και } n\neq 0 \end{cases} \qquad \forall n,m\in\mathbb{N}_0$$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $n,m\in\mathbb{N}_0$. Τότε:

$$\langle T_n,T_m\rangle_w = \int_{-1}^{1} w(t)T_n(t)T_m(t)\,dt = -\int_{\pi}^{0} w(\cos\theta)T_n(\cos\theta)T_m(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

$t=\cos\theta$

ή $\theta=\arccos t$

$$= \int_0^{\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta =$$

22.12

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)\theta) + \cos((n-m)\theta)\, d\theta .$$

Όταν $n=m$ τότε: $(T_n, T_n)_w = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left[1 + \cos(2n\theta)\right] d\theta = \begin{cases} \pi & n=0 \\ \frac{\pi}{2} + \left.\frac{\sin(2n\theta)}{2n}\right|_{\theta=0}^{\pi} = \pi/2 & n\neq 0 \end{cases}$.

Όταν: $n \neq m$ τότε: $(T_n, T_m)_w = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} + \left.\frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \right] = 0$ ∎

Πόρισμα: Για κάθε $N \in \mathbb{N}_0$ ισχύει: $\mathbb{P}^N[-1,1] = \text{span}\{T_0, \dots, T_N\}$.

Απόδειξη: Έστω $N \in \mathbb{N}_0$. Τα $(T_n)_{n=0}^N$ είναι μη μηδενικά καθώς $\|T_n\|_\infty = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$. Επιπλέον τα $(T_n)_{n=0}^N$ είναι γραμμ. ανεξάρτητα καθώς $(T_n, T_m)_w = 0$ όταν $n \neq m$ και $0 \leq n, m \leq N$. Επειδή $(T_n)_{n=0}^N \subset \mathbb{P}^N[-1,1]$, έπεται ότι αποτελούν μια βάση του $\mathbb{P}^N[-1,1]$ ∎

22.13

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω: $\mathbb{X} = (\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot)_w)$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $S_N : C([-1,1];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^N[-1,1]$ ως εξής: $S_N f := \frac{1}{\pi}(f,T_0)_w T_0 + \frac{2}{\pi}\sum_{\ell=1}^{N}(f,T_\ell)_w T_\ell$ για κάθε $f \in C([-1,1];\mathbb{R})$. Τότε: $\|S_N f - f\|_w \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, $\forall f \in C([-1,1];\mathbb{R})$.

Απόδειξη.

Έστω $f\in C([-1,1];\mathbb{R})$ και $N\in\mathbb{N}$. Επειδή $(T_n,T_m)_w = \begin{cases} 0 & n\neq m \\ \pi/2 & n=m\neq 0 \\ \pi & n=m=0 \end{cases}$ για κάθε $n,m\in\mathbb{N}_0$, συμπεραίνουμε η $S_N f$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^N[-1,1]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_w$ η οποία παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_w$. Έχοντας υπόψιν το Θ. Weierstrass θα εξετάσουμε αν η $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|_w$. Έστω $g\in C([-1,1];\mathbb{R})$.

Τότε: $$\|g\|_w = \left[\int_{-1}^{1} w(t)\, g^2(t)\, dt\right]^{1/2} \leq \|g\|_\infty \left(\int_{-1}^{1} w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|_\infty \sqrt{(T_0,T_0)_w}$$
$$= \sqrt{\pi}\,\|g\|_\infty .$$

22.14

Έτσι:

$$\|f-S_N f\|_w = \inf_{q\in \mathbb{P}^N[-1,1]} \|f-q\|_w \leq \|f-B_N f\|_w \leq \sqrt{\pi}\,\|f-B_N f\|_\infty .$$

Επειδή $\lim_{N\to+\infty} \|f-B_N f\|_\infty = 0$, έπεται: $\lim_{N\to+\infty}\|f-S_N f\|_w = 0$.

$\blacksquare$

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u>: Έστω $\mathcal{X}=(\mathbb{R}, C([-1,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot)_w)$ με: $(f,g)_w := \int_{-1}^{1} w(t) f(t) g(t)\,dt \ \forall f,g\in C([-1,1];\mathbb{R})$, $\widetilde{T}_n := \frac{T_n}{\|T_n\|_w}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$ και $S_N f := \sum_{\ell=0}^{N} (f,\widetilde{T}_\ell)_w \widetilde{T}_\ell$ $\forall f\in C([-1,1];\mathbb{R})$, $\forall N\in\mathbb{N}_0$.

Τότε: $\|S_N f - f\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0 \quad \forall f\in C^2([-1,1];\mathbb{R})$.

<u>Απόδειξη</u>: Η βασική ιδέα της απόδειξης είναι να χρησιμοποιήσουμε την επιπλέον ομαλότητα της f (δηλ. $f\in C^2([-1,1];\mathbb{R})$) για να βρούμε πως μεταβάλλεται ως προς ℓ ο συντελεστής Fourier $(f,\widetilde{T}_\ell)_w$

$\boxed{29.15}$

Έχουμε τα ακόλουθα:

$$(f, \tilde{T}_0)_w = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} w(t) \cdot f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, d\theta.$$

$n \geq 1$

$$(f, \tilde{T}_n)_w = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^{1} w(t)\, f(t) \cdot T_n(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta)\, \cos(n \arccos(\cos\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \cdot \cos(n\theta)\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f(\cos\theta) \left(\frac{\sin(n\theta)}{n}\right)' d\theta$$

$$= + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin(n\theta)\, f'(\cos\theta) \cdot \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} f'(\cos\theta) \left(-\frac{\cos(n\theta)}{n}\right)' \sin\theta\, d\theta$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{n^2\sqrt{\pi}} \left[\cos(n\theta) f'(\cos\theta) \sin\theta \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos\theta\, f'(\cos\theta)\, d\theta + \int_0^{\pi} \cos(n\theta)\, f''(\cos\theta) \sin^2\theta\, d\theta \right]$$

22.16

$$= + \frac{\sqrt{2}}{n^2\sqrt{\pi}} \left[\int_0^{\pi} f'(\cos\theta)\cdot\cos(n\theta)\cos\theta\, d\theta - \int_0^{\pi} f''(\cos\theta)\cos(n\theta)\sin^2\theta\, d\theta \right].$$

Έτσι: $$|(f, T_n)_w| \leq \frac{\sqrt{2}}{n^2\sqrt{\pi}}\left[\pi\cdot\|f'\|_\infty + \pi\|f''\|_\infty\right]$$

$$\leq \frac{\sqrt{2\pi}}{n^2}\left(\|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Για κάθε $N, M \in \mathbb{N}$ με: $M > N$, έχουμε:

$$\|S_N f - S_M f\|_\infty = \left\| \sum_{\ell=N+1}^{M} (f, \tilde{T}_\ell)_w \tilde{T}_\ell \right\|_\infty \leq \sum_{\ell=N+1}^{M} \|\tilde{T}_\ell\|_\infty \, |(f, \tilde{T}_\ell)_w|$$

$$\leq \sum_{\ell=N+1}^{M} \frac{\overbrace{\|T_\ell\|_\infty}^{=1}}{\underbrace{\|\tilde{T}_\ell\|_w}_{=\sqrt{\pi}/\sqrt{2}}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\ell^2}\left(\|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty\right)$$

$$\leq 2\left(\|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty\right)\sum_{\ell=N+1}^{M} 1/\ell^2 \xrightarrow[N, M \to +\infty]{} 0$$

καθώς η σειρά $\sum_{\ell=1}^{\infty} 1/\ell^2$ συγκλίνει

22.17

Έτσι η ακολουθία συναρτήσεων $(S_N f)_{N=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια $Sf \in C([-1,1];\mathbb{R})$.

Επειδή η $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισχυρότερη της $\|\cdot\|_W$, έπεται ότι: $\lim\limits_{N\to+\infty} \|S_N f - Sf\|_W = 0$

Ήδη $\|S_N f - f\|_W \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$. Η μοναδικότητα του ορίου δίνει: $f = Sf$. ■

Παρατήρηση:

Είδαμε ότι: $\|S_M f - S_N f\|_\infty \le C(f', f'') \cdot \sum\limits_{\ell=N+1}^{M} 1/\ell^2$, $\forall M,N \ge 1$, $M > N$. Παίρνοντας $M \to +\infty$

έπεται: $\|f - S_N f\|_\infty \le C(f', f'') \cdot \sum\limits_{\ell=N+1}^{\infty} 1/\ell^2 \le \frac{C}{N}$, δηλ. καταλήξαμε σε τάξη σύγκλισης 1 ως προς $1/N$. ■