23.0

Διάλεξη 23

(video)

(ασκήσεις)

ΜΕΜ-255 Ⓗ. Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

23.1

Άσκηση 3.2.

Έστω $\underline{X} = (\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ με: $(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g \in C([0,1];\mathbb{R})$, και $\|\cdot\|$ η νόρμα που παράγεται από το $(\cdot,\cdot)$.

d) Έστω: $g \in C([0,1];\mathbb{R})$ με $g(t) = e^t$ για κάθε $t \in [0,1]$ και πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}^2[0,1]$ με: $p(t) = 1 + t + t^2/2$ για κάθε $t \in [0,1]$. Εξετάστε αν το p είναι η βέλτιστη προσέγγιση της g από τον $\mathbb{P}^2[0,1]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$.

Λύση: Το πολυώνυμο p είναι βέλτιστη προσέγγιση της g από τον $\mathbb{P}^2[0,1]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ ανν $(g-p, q) = 0 \quad \forall q \in \mathbb{P}^2[0,1]$ ανν $(p,q) = (g,q)$ $\forall q \in \{1, t, t^2\}$. Έστω: $q(t) = 1 \ \forall t \in [0,1]$. Τότε: $(g,q) = \int_0^1 e^t dt = e - 1$ και $(p,q) = \int_0^1 (1 + t + t^2/2)\,dt = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$. Έτσι: $(g,q) \neq (p,q)$, που σημαίνει ότι το p δεν είναι η βέλτιστη προσέγγιση της g από τον $\mathbb{P}^2[0,1]$.

23.2

β) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, έστω $p_n^* \in \mathbb{P}^n[0,1]$ η βέλτιστη προσέγγιση της συνάρτησης g από τον $\mathbb{P}^n[0,1]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$.

Δείξτε ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g-p_n^*\| = 0$, δηλ. $p_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} g$ $\qquad \left[e^t = \sum_{\ell=0}^{\infty} t^\ell/\ell!\right]$

Λύση: Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$, ορίζουμε: $S_n \in \mathbb{P}^n[0,1]$ με: $S_n(t) = \sum_{\ell=0}^{n} t^\ell/\ell!$ $\forall t \in [0,1]$.

Από τον τύπο του Taylor, για κάθε $t \in [0,1]$, έχουμε:

$$g(t) - S_n(t) = g(t) - \sum_{\ell=0}^{n} \frac{t^\ell}{\ell!} = \underbrace{\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^{\xi(t)}}_{\text{υπόλοιπο Lagrange}} \quad \text{όπου } \xi(t) \in (0,t).$$

Έτσι:

$$\|g-p_n^*\| \le \|g-S_n\| \le \|g-S_n\|_\infty \le \frac{e}{(n+1)!} \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Άρα: $\lim\limits_{n\to+\infty} \|g-p_n^*\| = 0$. ∎

23.3

Άσκηση 3.5

Έστω $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ τα πολυώνυμα Legendre στο $[-1,1]$.

α) Βρείτε ένα αναδρομικό τύπο για τις παραγώγους $(P_n')_{n=0}^{\infty}$ των πολυωνύμων Legendre.

Λύση: Έχουμε δείξει ότι: $P_0(t)=1$, $P_1(t)=t$ και $(n+1)P_{n+1}(t)=(2n+1)tP_n(t)-nP_{n-1}(t)$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Παραγωγίζοντας έπεται: $P_0'(t)=0$, $P_1'(t)=1$ και

$$(n+1)\,P_{n+1}'(t)=(2n+1)\,P_n(t)+(2n+1)\,t\,P_n'(t)-n\,P_{n-1}'(t) \quad \text{για κάθε } n\in\mathbb{N}.$$

β) Για κάθε $n,m\in\mathbb{N}_0$ υπολογίστε την ποσότητα $I_{n,m}=\int_{-1}^{1}P_n'(t)\,P_m'(t)\,dt$. $\quad I_{n,m}=I_{m,n}$

Λύση: Έστω $m,n\in\mathbb{N}_0$ με: $m\geq n$. Με ολοκλήρωση κατά μέρη έχουμε:

$$I_{n,m}=P_n'(t)P_m(t)\Big|_{t=-1}^{t=1}-\int_{-1}^{1}P_m(t)\,P_n''(t)\,dt.$$

Όταν $n=0$ ή $n=1$, τότε: $P_n''(t)=0\ \forall t\in[-1,1]$. Όταν $n\geq 2$ τότε $P_n''\in\mathbb{P}^{n-2}[-1,1]\subset\mathbb{P}^{m-1}[-1,1]$, το οποίο λόγω της σχέσης ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre συνεπάγεται $\int_{-1}^{1}P_m(t)P_n''(t)\,dt=0$. Έτσι καταλήξαμε στη σχέση

$$I_{n,m}=P_n'(1)P_m(1)-P_n'(-1)P_m(-1).$$

Το P_m είναι άρτια συνάρτηση όταν m άρτιος και περιττή συνάρτηση όταν το m είναι περιττός, λόγω της αντίστοιχης ιδιότητας των ορθογωνίων πολυωνύμων. Αυτό συνεπάγεται ότι $P_m(-1)=(-1)^m$, καθώς $P_m(1)=1$. Επιπλέον, το P_n' είναι άρτια συνάρτηση όταν το n είναι περιττός και περιττή συνάρτηση όταν το n είναι άρτιος. Έτσι: $P_n'(-1)=(-1)^{n+1}P_n'(1)$.

Επομένως: $I_{n,m} = P_n'(1) - (-1)^{n+1}(-1)^m P_n'(1)$

$$= P_n'(1) \left[1 - (-1)^{n+m+1}\right]$$

Μένει να βρούμε κάποιο τύπο για το $P_n'(1)$. Μεθόδευση το (α) $P_0'(1)=0$ και $P_1'(1)=1$.

Επιπλέον: $(n+1)P_{n+1}'(1) = (2n+1) + (2n+1)P_n'(1) - n P_{n-1}'(1) \quad \forall n \geq 1$, που είναι ένας αναδρομικός τύπος για την τιμή $P_n'(1)$. ∎

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ:</u> Στην βιβλιογραφία υπάρχει μια πιο απλή αναδρομική σχέση για τα $(P_n')_{n=0}^{\infty}$, η οποία έχει τη μορφή: $P_{n+1}'(t) - P_{n-1}'(t) = (2n+1)P_n(t) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ας δούμε πως μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση αυτή. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε: $P_{n+1}' \in \mathbb{P}^n[-1,1]$.
Άρα: $P_{n+1}'(t) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(t)$. Έστω: $\ell \in \{0, \dots, n\}$. Τότε: $\lambda_\ell \|P_\ell\|^2 = \int_{-1}^{1} P_{n+1}' P_\ell \, dt$.

$$\Rightarrow \lambda_\ell \cdot \frac{2}{2\ell+1} = P_{n+1}(t)P_\ell(t)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n+1} P_\ell' \, dt \Rightarrow \lambda_\ell = \frac{2\ell+1}{2}\left(1 - (-1)^{n+\ell+1}\right).$$

23.5

Έστω $n \geq 2$. Τότε: $P'_{n-1} \in \mathbb{P}^{n-2}[-1,1]$ και $P'_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-2} \tilde{\lambda}_j P_j$. Άρα, για $j \in \{0, \dots, n-2\}$, έπεται: $\tilde{\lambda}_j \|P_j\|^2 = \int_{-1}^{1} P'_{n-1} P_j \, dt \Rightarrow \tilde{\lambda}_j \frac{2}{2j+1} = P_{n-1} P_j \Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} P_{n-1} P'_j \, dt$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}_j \frac{2}{2j+1} = P_{n-1}(1) P_j(1) - P_{n-1}(-1) P_j(-1) - \int_{-1}^{1} P_{n-1} P'_j \, dt$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}_j \frac{2}{2j+1} = 1 - (-1)^{n+j-1} \Rightarrow \tilde{\lambda}_j = \frac{2j+1}{2} \left(1 - (-1)^{n+j-1}\right).$$

$$\Rightarrow \tilde{\lambda}_j = \frac{2j+1}{2} \left(1 - (-1)^{n+j+1}\right) = \lambda_j .$$

Για $n = 1$, έχουμε: $2P'_2(t) = 3P_1(t) + 3t\underbrace{P'_1(t)}_{=1} - \underbrace{P'_0(t)}_{=0}$

$$= 3t + 3t = 6t = 6P_1(t),$$

Άρα: $P'_2(t) = 3P_1(t) \Rightarrow P'_2(t) - P'_0(t) = (2 \cdot 1 + 1) P_1(t)$. Έτσι η προς απόδειξη σχέση ισχύει.

23.6

Έστω $n\geq 1$. Τότε $P'_{n+1}(t)-P'_{n-1}(t)=\sum_{l=0}^{n}\lambda_l P_l-\sum_{l=0}^{n-2}\lambda_l P_l$

$$= \lambda_n P_n + \lambda_{n-1} P_{n-1}$$

$$= \frac{2n+1}{2}\left(1-(-1)^{n+n+1}\right)P_n + \frac{2n-1}{2}\left(\underbrace{1-(-1)^{\overbrace{n+1+n-1}^{2n}}}_{=0}\right)P_{n-1}$$

$$= \frac{2n+1}{2}\cdot 2\cdot P_n = (2n+1)P_n.$$

Για $t=1$ ο τύπος που αποδείξαμε δίνει: $P'_{n+1}(1)=(2n+1)+P'_{n-1}(1)$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Αθροίζοντας έπεται: $\sum_{l=1}^{n}P'_{l+1}(1)-\sum_{l=1}^{n}P'_{l-1}(1)=\sum_{l=1}^{n}(2l+1)\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow \sum_{l=2}^{n+1}P'_l(1)-\sum_{l=0}^{n-1}P'_l(1)=2\frac{(n+1)n}{2}+n \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow P'_{n+1}(1)+P'_n(1)=n^2+2n+P'_0(1)+P'_1(1) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\Rightarrow P'_{n+1}(1)+P'_n(1)=n^2+2n+1 \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

23.7

Άσκηση 3.4

Έστω: $\mathbb{X} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^4, +, \cdot, \|\cdot\|_2)$ όπου $\|\cdot\|_2$ η Ευκλείδια νόρμα.
Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση α^* του $\alpha = (1,2,3,5)^T$ από τον υπόχωρο
$Z = \{z \in \mathbb{R}^4 : z_2 = z_4 = 0\}$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$.

Λύση:
Έστω $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με: $\varphi(x,y) = (x-1)^2 + 4 + (y-3)^2 + 25 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Έτσι, για κάθε $z \in Z$, έχουμε: $\|\alpha - z\|_2 = \sqrt{\varphi(z_1, z_3)}$. Αρκεί να βρούμε
για ποια $x^*, y^* \in \mathbb{R}$ έχουμε: $\varphi(x^*, y^*) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)$. Προφανώς $(x^*, y^*) = (1,3)$.
για το οποίο $\varphi(x^*, y^*) = 29$. Έτσι: $\alpha^* = (1,0,3,0)$.

Σημ 1: $\varphi(x,y) = (x-1)^2 + 4 + (y-3)^2 + 25 \geq 4 + 25 = 29 = \varphi(x^*, y^*)$.

Σημ 2: Η άσκηση μπορεί να λυθεί βρίσκοντας μία βάση του Z και λύνοντας το 2x2 σύστημα των κανονικών εξισώσεων.

23.8

Άσκηση 3.1.

Έστω $X=(\mathbb{R}, C^1([-1,1];\mathbb{R}),+,\cdot,(\cdot,\cdot)_1)$ με: $(f,g)_1 = \int_{-1}^{1} f'(t)g'(t)\,dt + \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,dt$ για κάθε $f,g \in C^1([-1,1];\mathbb{R})$. Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ως προς το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)_1$ για να ορθοκανονικοποιήσετε τα πολυώνυμα: $\{1,t,t^2\}$. Συγκρίνετε τα πολυώνυμα που βρήκατε με τα αντίστοιχα πολυώνυμα Legendre.

Λύση: Έστω: $\varphi_1(t)=1$, $\varphi_2(t)=t$ και $\varphi_3(t)=t^2$.

ΒΗΜΑ 1: $\tilde{e}_1(t)=\varphi_1(t)=1$ $\quad \|\tilde{e}_1\|_1 = \left[\int_{-1}^{1}\varphi_1'(t)\varphi_1'(t)\,dt + \int_{-1}^{1}\varphi_1(t)\varphi_1(t)\,dt\right]^{1/2} = \sqrt{2}$

Έτσι: $e_1(t) = \dfrac{\tilde{e}_1(t)}{\|\tilde{e}_1\|_1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. $\qquad P_0(t)=1$

ΒΗΜΑ 2: $\tilde{e}_2(t) = \varphi_2(t) - (\varphi_2,e_1)_1 e_1(t) = t - \frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1} 1\cdot 0\,dt + \int_{-1}^{1} t\,dt\right] = t$

$\|\tilde{e}_2\|_1 = \left(\int_{-1}^{1} dt + \int_{-1}^{1} t^2\,dt\right)^{1/2} = \left[2+\frac{2}{3}\right]^{1/2} = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$ $\qquad e_2(t) = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\,t$. $\quad P_1(t)=t$

23.9

ΒΗΜΑ 3: $\tilde{e}_3(t) = \varphi_3(t) - (\varphi_3, e_2)_1 e_2(t) - (\varphi_3, e_1)_1 e_1(t)$

$$= t^2 - \frac{3}{8}(\varphi_3, \tilde{e}_2)_1 \tilde{e}_2 - \frac{1}{2}(\varphi_3, \tilde{e}_1)_1 \tilde{e}_1$$

$$e_3(t) = \frac{\tilde{e}_3(t)}{\|\tilde{e}_3\|_1}$$

$$(\varphi_3, \tilde{e}_1)_1 = \int_{-1}^{1} t^2\, dt = 2/3$$

$$(\varphi_3, \tilde{e}_2)_1 = \int_{-1}^{1} 2t\, dt + \int_{-1}^{1} t^3\, dt = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2P_2(t) = 3t P_1 - P_0 = 3t^2 - 1 \\ P_2(t) = \frac{3}{2}t^2 - 1/2 = \frac{3}{2}(t^2 - \frac{1}{3}) \end{array}}$$

$$\tilde{e}_3(t) = t^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = t^2 - 1/3$$

$$\|\tilde{e}_3\|_1^2 = \int_{-1}^{1} 4t^2\, dt + \int_{-1}^{1} (t^2 - 1/3)^2\, dt = 4\cdot\frac{2}{3} + \int_{-1}^{1} (t^4 - \frac{2}{3}t^2 + 1/9)\, dt$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{8}{3} - \frac{2}{9} + \frac{2}{5} = \frac{22}{9} + \frac{2}{5} = \frac{110+18}{45} = \frac{128}{45}$$

$$e_3(t) = \frac{3\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}(t^2 - 1/3)$$

23.10

'Ασκηση 3.9

'Εστω: $\mathcal{X}=(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot,(\cdot,\cdot))$ με: $(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)dt$ για κάθε $f,g\in C([a,b];\mathbb{R})$, $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ ένα ορθοκανονικό σύνολο πολυωνύμων με: $\mathbb{P}^n[a,b]=\operatorname{span}\{q_0,\dots,q_n\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$. Επιπλέον, για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$, ορίζουμε: $B^n: C([a,b];\mathbb{R})\to C([a,b];\mathbb{R})$ ως εξής:

$$B^n f := f-\sum_{l=0}^{n}(f,q_l)\,q_l \quad \text{για κάθε } f\in C([a,b];\mathbb{R})$$

α) Δ.Ο. για κάθε $n\in\mathbb{N}_0$ και $f\in C([a,b];\mathbb{R})\setminus\mathbb{P}^n[a,b]$ η $B^n f$ έχει δύο σημεία εναλλαγής προσήμου στο (a,b), δηλ. υπάρχουν $t_1,t_2\in(\alpha,\beta)$ τω $B^n f(t_1)B^n f(t_2)<0$.

Λύση: 'Εστω ότι η $B^n f$ έχει σταθερό πρόσημο στο (α,b). Εστω $q\in\mathbb{P}^n[a,b]$ με: $q(t)=1$ για κάθε $t\in[a,b]$. Άρα: $(B^n f,q)=0$ καθώς η $\sum_{l=0}^{n}(f,q_l)q_l$ είναι η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^n[a,b]$. 'Αρα: $\int_a^b B^n f(t)\,dt=0\Rightarrow\int_a^b|B^n f(t)|\,dt=0\Rightarrow B^n f(t)=0\ \forall t\in[a,b]$.

Καταλήγουμε σε άτοπο διότι $B^n f=0$ σημαίνει: $f\in\mathbb{P}^n[a,b]$ 'Ετσι η $B^n f$ αλλάζει πρόσημο στο (α,β).

23.11

β) Δείξτε ότι, για κάθε $n \geq 1$ και $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ η $B^n f$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο (a,b).

<u>Λύση:</u> Όταν $f \in \mathbb{P}^n[a,b]$ τότε $B^n f = 0$ στο (a,b), το οποίο εξασφαλίζει ότι έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο (a,b). Ας υποθέσουμε ότι: $f \in C([a,b];\mathbb{R}) \setminus \mathbb{P}^n[a,b]$.

Έστω αν η $B^n f$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Από το (α) συμπεραίνουμε ότι η $B^n f$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $t_0 \in (a,b)$. Άρα το πρόσημο της $B^n f$ στο (a,t_0) είναι σταθερό και το πρόσημο της $B^n f$ στο (t_0,b) επίσης σταθερό. Επιπλέον το πρόσημο της $B^n f$ στο (a,t_0) είναι αντίθετο του προσήμου στο (t_0,b). Έστω $\varepsilon = 1$ όταν το πρόσημο της $B^n f$ στο (a,t_0) είναι θετικό, και $\varepsilon = -1$ όταν το πρόσημο της $B^n f$ στο (a,t_0) είναι αρνητικό. Τότε η συνάρτηση $q \in \mathbb{P}^1[a,b]$ με:
$q(t) = \varepsilon(t_0 - t)$ $\forall t \in [a,b]$ είναι ομόσημη της $B^n f$ στα (a,t_0) και (t_0,b). Επειδή, $n \geq 1$, έχουμε: $q \in \mathbb{P}^n[a,b]$, και επομένως $(B^n f, q) = 0$

$$\Rightarrow \int_a^b B^n f(t) q(t)\, dt = 0 \Rightarrow \int_a^{t_0} \underbrace{B^n f(t) q(t)}_{\geq 0} dt + \int_{t_0}^b \underbrace{B^n f(t) q(t)}_{\geq 0} dt = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^{t_0} B^n f(t) q(t)\, dt = \int_{t_0}^b B^n f(t) q(t)\, dt = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} B^n f(t)(t_0 - t) = 0 \ \forall t \in [a,t_0] \\ B^n f(t)(t - t_0) = 0 \ \forall t \in (t_0,b] \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} B^n f(t) = 0 \\ \forall t \in [a,b] \end{array}$$

23.12

Άρα: $f \in \mathbb{P}^n[a,b]$, που δόθηκε σε άτοπο.

Άσκηση 3.6

Έστω $X = (\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ με $(f,g) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$ για κάθε $f,g \in C([0,1];\mathbb{R})$.

Έστω: $p \in C([0,1];\mathbb{R})$ με: $p(t) = 5t^4 + 3t^3$ για κάθε $t \in [0,1]$. Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση $p^* \in \mathbb{P}^2[0,1]$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ η οποία παράγεται από το $(\cdot,\cdot)$.

Λύση: Έστω P_0, P_1, P_2 τα πολυώνυμα Legendre βαθμού 0,1,2, αντίστοιχα. Έπειτα ορίζαμε $Q_\ell(t) = P_\ell(2t-1)$ $\forall t \in [0,1]$, $\ell = 0,1,2$. Τα $(Q_\ell)_{\ell=0}^{2}$ είναι ορθογώνια στον X και:

$$(Q_\ell, Q_{\ell'}) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(t)\,P_{\ell'}(t)\,dt = \frac{1}{2}\delta_{\ell\ell'} \text{ για } \ell,\ell' = 0,1,2. \text{ Έτσι:}$$

$$p^*(t) = \sum_{\ell=0}^{2} \frac{(p, Q_\ell)}{(Q_\ell, Q_\ell)} Q_\ell(t) = 2\sum_{\ell=0}^{2} (p, Q_\ell)\, Q_\ell(t).$$

23.13

$$(p,Q_0) = \int_0^1 (5t^4+3t^3)\,dt = 2$$

$$(p,Q_1) = \int_0^1 (5t^4+3t^3)(2t-1)\,dt = -2 + 2\int_0^1 (5t^5+3t^4)\,dt$$

$$= -2 + 2\left(\frac{5}{6}+\frac{3}{5}\right) = -2 + \frac{25+18}{15} = \frac{43-30}{15} = \frac{13}{15}$$

$$(p,Q_2) = \int_0^1 (5t^4+3t^3)\frac{3}{2}\left((2t-1)^2-\frac{1}{3}\right)dt = -\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 (5t^4+3t^3)\,dt}_{=2} + \frac{3}{2}\int_0^1 (5t^4+3t^3)(4t^2+1-4t)\,dt$$

$$= -1 + \frac{3}{2}\cdot 2 + 6\int_0^1 (5t^6+3t^5)\,dt - 6\int_0^1 (5t^5+3t^4)\,dt$$

$$= 2 + 6\left[\frac{5}{7}+\frac{3}{6}-\frac{5}{6}-\frac{3}{5}\right] = 6\,\frac{25-21}{35} = \frac{24}{35}.$$

Έτσι: $p^*(t) = 4 + \frac{26}{15}(2t-1) + \frac{48}{35}\cdot\frac{3}{2}\left[(2t-1)^2-\frac{1}{3}\right].$

23.14

Άσκηση 3.8.

Έστω $\mathbb{X}=(\mathbb{R}, R[a,b], +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ όπου $(f,g)=\int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g \in R[a,b]$.

Για δοθέν $J\in\mathbb{N}$ με: $J\geq 5$ ορίζουμε $h=\frac{b-a}{J}$, $x_j := a+jh$ για $j=0,\dots,J$,

$I_j=(x_{j-1},x_j)$ για $j=1,\dots,J$, και

$$Y_h := \{ g\in R[a,b] : g(x_j)=0 \text{ για } j=0,\dots,J, \; \exists (c_j)_{j=1}^{J} \text{ τ.ω. } g|_{I_j}=c_j \text{ για } j=1,\dots,J \}.$$

Έστω $f\in C([a,b];\mathbb{R})$ η οποία είναι Lipschitz στο $[a,b]$ με σταθερά $L>0$ και $f^*\in Y_h$ η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον Y_h. Δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C>0$ τ.ω. $\|f-f^*\|\leq Ch$.

23.15

Λύση:

Έχουμε δεί ότι: $f^*|_{I_j} = \frac{1}{h}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t)\,dt$ για $j=1,\dots,J$. Έτσι:

$$\|f-f^*\|^2 = \int_a^b |f-f^*|^2\,dt = \sum_{j=1}^{J} \int_{I_j} \Big(f(t) - \frac{1}{h}\int_{I_j} f(s)\,ds\Big)^2 dt$$

$$= \sum_{j=1}^{J} \frac{1}{h^2} \int_{I_j} \Big(\int_{I_j} (f(t)-f(s))\,ds\Big)^2 dt$$

$$\overset{C\text{-}S}{\leq} \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{J} \int_{I_j} \Big(\int_{I_j} 1\,ds\Big)\Big(\int_{I_j} (f(t)-f(s))^2 ds\Big)\,dt$$

$$\leq \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{J} \int_{I_j} \Big[h \int_{I_j} |f(t)-f(s)|^2 ds\Big]\,dt$$

$$\leq \frac{L^2}{h} \sum_{j=1}^{J} \int_{I_j} \Big(\int_{I_j} |t-s|^2\,ds\Big)\,dt$$

23.16

$$\leq \frac{L^2}{h} \sum_{j=1}^{J} \int_{I_j} \frac{(s-t)^3}{3} \Big|_{s=x_{j-1}}^{s=x_j} dt$$

$$\leq \frac{L^2}{3h} \sum_{j=1}^{J} \int_{I_j} \left[(x_j-t)^3 - (x_{j-1}-t)^3 \right] dt$$

$$\leq \frac{L^2}{3h} \sum_{j=1}^{J} \left[-\frac{(x_j-t)^4}{4} \Big|_{t=x_{j-1}}^{t=x_j} + \frac{(x_{j-1}-t)^4}{4} \Big|_{t=x_{j-1}}^{t=x_j} \right]$$

$$\leq \frac{L^2}{12h} \sum_{j=1}^{J} \left[h^4 + h^4 \right] = \frac{L^2}{6h} \cdot h^3 \sum_{j=1}^{J} h = \frac{(b-a)}{6} L^2 \cdot h^2$$

Άρα: $\|f-f^*\| \leq \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{6}} L h.$ ∎

23.17

Άσκηση 3.7

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση των $(x_1,y_1)=(1,2)$, $(x_2,y_2)=(2,1)$, $(x_3,y_3)=(3,3)$ από τον $\mathbb{P}^1$ και από τον $\mathbb{P}^2$. Κάντε ένα γράφημα των παραπάνω σημείων και των πολυωνύμων που βρήκατε.

Λύση:

α) $x=(1,2,3)^T \quad y=(2,1,3)^T \qquad \mathcal{B}=\{1,t\}$

$z^1=(1,1,1)^T$, $z^2=(1,2,3)^T$ $\qquad (z^1,z^1)=3$, $(z^1,z^2)=6$, $(z^2,z^2)=4+1+9=14$.

$(y,z^1)=6$, $(y,z^2)=13$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 13 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1+2\lambda_2=2 \\ 3\lambda_1+7\lambda_2=13/2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \lambda_1=2-2\lambda_2 \\ 6-6\lambda_2+7\lambda_2=\frac{13}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1=1 \\ \lambda_2=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

$$p^*(t)=1+t/2$$

23.18

β) $x=(1,2,3)^T \quad y=(2,1,3)^T \qquad \mathcal{B}=\{1,t,t^2\}$

$z^1=(1,1,1)^T \qquad z^2=(1,2,3)^T \quad z^3=(1,4,9)$

$(z^1,z^1)=3,\ (z^1,z^2)=6,\ (z^1,z^3)=14$

$(z^2,z^2)=14,\ (z^2,z^3)=36$

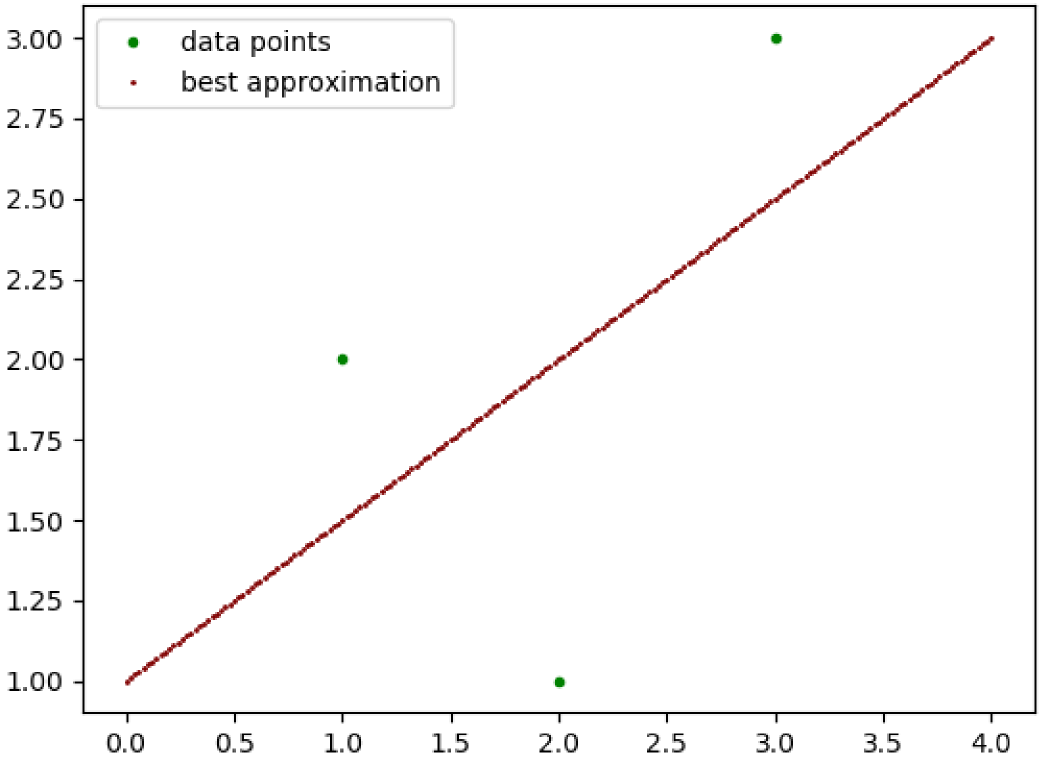
$(z^3,z^3)=98$

$(y,z^1)=6,\ (y,z^2)=13,\ (y,z^3)=33$

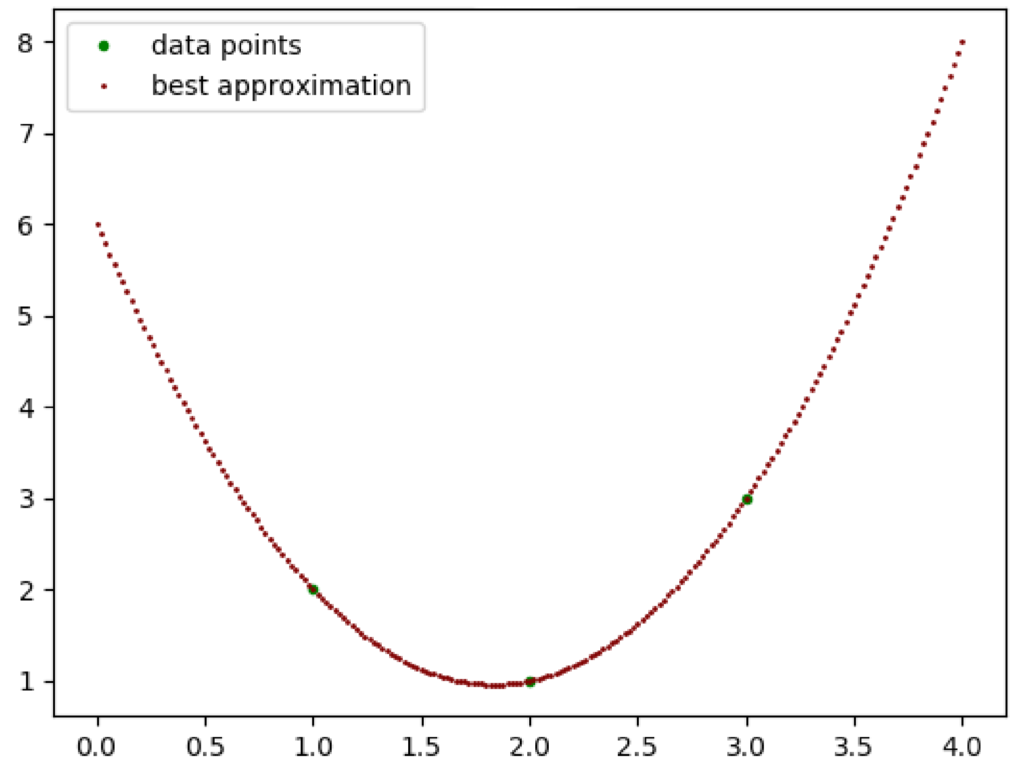
$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 13 \\ 33 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1=6 \\ \lambda_2=-\frac{11}{2} \\ \lambda_3=3/2 \end{array}$$

$$p^*(t)=6-\frac{11}{2}t+\frac{3}{2}t^2$$

23.19


data points
best approximation
3.00
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

93.20


data points
best approximation
8
7
6
5
4
3
2
1
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
3.5
4.0

23.21

Άσκηση 3.3

Έστω $(\mathbb{R}, X, +, \cdot, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|\cdot\|$ η παραγόμενη από το εσωτερικό γινόμενο νόρμα. Έστω $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$, $(x_j)_{j=1}^{n}$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του X και $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με:

$$G(z) = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} z_j x_j \right\|^2 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Έστω $Y = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ και $z^* \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $x^* = \sum_{j=1}^{n} z_j^* x_j$ να είναι η βέλτιστη προσέγγιση του x από τον Y ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$. Δ.Ο. $\nabla G(z^*) = 0$

Λύση Είναι προφανές ότι στο z^* η G λαμβάνει ολικό ελάχιστο καθώς:
$G(z^*) = \|x - x^*\|^2 \leq \|x - y\|^2 \; \forall y \in Y$. Άρα: $G(z^*) \leq G(z) \; \forall z \in \mathbb{R}^n$. Αν η G είναι C^1 τότε: $\nabla G(z^*) = 0$.

23.22

$$G(z) = \left(x - \sum_{j=1}^{n} z_j x_j ,\, x - \sum_{j=1}^{n} z_j x_j\right) = \|x\|^2 - 2\left(x, \sum_{j=1}^{n} z_j x_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} z_j x_j , \sum_{\ell=1}^{n} z_\ell x_\ell\right)$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{j=1}^{n} z_j (x, x_j) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} z_j z_\ell (x_j, x_\ell) \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Άρα:

$$\partial_{z_k} G(z) = -2(x, x_k) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (x_j, x_\ell)\left(\partial_{z_k} z_j\, z_\ell + z_j\, \partial_{z_k} z_\ell\right)$$

$$= -2(x, x_k) + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j, x_\ell) z_\ell \delta_{kj} + \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (x_j, x_\ell) z_j \delta_{k\ell}$$

$$= -2(x, x_k) + \sum_{\ell=1}^{n} (x_k, x_\ell) z_\ell + \sum_{j=1}^{n} (x_j, x_k) z_j$$

$$= -2\left[\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell, x_k) z_\ell - (x, x_k)\right] \qquad , k = 1, \dots, n.$$

Έτσι: $\partial_{z_k} G(z^*) = -2\left[\sum_{\ell=1}^{n} (x_\ell, x_k) z_\ell^* - (x, x_k)\right] = -2\left[(x^* - x, x_k)\right] = 0$ για $k = 1, \dots, n.$ ∎