24.0

Διάλεξη 24

(video)
(ασκήσεις)

ΜΕΜ-255 Ⓜ. Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

24.1

Άσκηση 43

Δείξτε ότι τα πολυώνυμα Chebyshev πρώτου είδους έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(1-x)^2 T_n''(x) - x T_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

Λύση Αρκεί να αποδείξουμε τη σχέση για κάθε $x \in [-1,1]$ ή ισοδύναμα για $x = \cos\theta$ όπου $\theta \in [0,\pi]$ δηλ.

$$(1-\cos^2\theta)\, T_n''(\cos\theta) - \cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + n^2\, T_n(\cos\theta) = 0 \quad \forall \theta \in [0,\pi], \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Έστω: $n \in \mathbb{N}_0$. Τότε: $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$ $\forall \theta \in [0,\pi]$. Παραγωγίζοντας ως προς θ έχουμε: $\sin\theta \cdot T_n'(\cos\theta) = n\sin(n\theta)$ $\forall \theta \in [0,\pi]$. Παραγωγίζοντας ξανά την τελευταία σχέση ως προς θ έπεται: $\cos\theta \cdot T_n'(\cos\theta) - \sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) = n^2\cos(n\theta)$, $\forall \theta \in [0,\pi]$.

Επομένως: $+\sin^2\theta\, T_n''(\cos\theta) - \cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + n^2\cos(n\theta) = 0$ $\forall \theta \in [0,\pi]$

$$\Leftrightarrow (1-\cos^2\theta)\, T_n''(\cos\theta) - \cos\theta\, T_n'(\cos\theta) + n^2\, T_n(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in [0,\pi].$$

24.2

Άσκηση 4.1

Έστω: $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με: $f(x)=5x^7+6x^6+3x^4+2x-1 \quad \forall x\in[-1,1]$. Προσδιορίστε τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της συνάρτησης f από τον $\mathbb{P}^6[-1,1]$.

Λύση: Έστω: $p^*\in\mathbb{P}^6[-1,1]$ η βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^6[-1,1]$.

Τότε:

$$\min_{q\in\mathbb{P}^6[-1,1]} \|f-q\|_\infty = \|f-p^*\|_\infty \iff 5\left\|\tfrac{1}{5}f-\tfrac{1}{5}p^*\right\|_\infty = 5\min_{q\in\mathbb{P}^6[-1,1]}\left\|\tfrac{1}{5}f-\tfrac{1}{5}q\right\|_\infty$$

$$\iff \max_{x\in[-1,1]}\left|x^7-\frac{1}{5}\underbrace{\left[-6x^6-3x^4-2x+1-p^*(x)\right]}_{\in\mathbb{P}^6[-1,1]}\right| = \min_{z\in\mathbb{P}^6[-1,1]}\ \max_{x\in[-1,1]}\left|x^7-z(x)\right|$$

$$= \min_{\hat{z}\in\hat{\mathbb{P}}^7[-1,1]} \|\hat{z}\|_\infty = \|\hat{T}_7\|_\infty$$

Άρα: $\frac{1}{5}f-\frac{1}{5}p^* = \hat{T}_7 \iff f-p^* = 5\hat{T}_7 \iff p^* = f-5\cdot 2^{-6}T_7$

$$\iff p^* = f-\frac{5}{2^6}T_7 .$$

∎

24.3

Άσκηση 4.6

Έστω $n \in \mathbb{N}_0$ και $B^n_\ell(t) := \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}$ $\forall t \in [0,1]$, $\ell = 0, \dots, n$, η βάση πολυωνύμων Bernstein βαθμού n.

α). Δ.Ο. οι $(B^n_\ell)_{\ell=0}^{n+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις του

$(\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$.

<u>Λύση</u>. Η απόδειξη θα γίνει με μαθηματική επαγωγή.

<u>Βήμα 1</u>: Έστω $n=0$. Τότε $B^0_0(t) = 1 \neq 0$ $\forall t \in (0,1)$, το οποίο είναι προφανώς γραμμικό ανεξάρτητο στο $(0,1)$.

<u>Βήμα 2</u>: Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ τα $(B^n_\ell)_{\ell=0}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $(0,1)$. Άρα τα πολυώνυμα $\{t^\ell (1-t)^{n-\ell}\}_{\ell=0}^n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $(0,1)$, καθώς $\binom{n}{\ell} \neq 0$ για $\ell = 0, \dots, n$. Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι τα $\{t^\ell (1-t)^{n+1-\ell}\}_{\ell=0}^{n+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $(0,1)$.

24.4

Έστω: $(\lambda_j)_{j=0}^{n+1} \subset \mathbb{R}$ τ.ω. $\sum_{j=0}^{n+1} \lambda_j t^j (1-t)^{n+1-j} = 0 \quad \forall t \in (0,1)$

$$\Rightarrow \lambda_{n+1} t^{n+1} + (1-t) \sum_{j=0}^{n} \lambda_j t^j (1-t)^{n-j} = 0 \quad \forall t \in (0,1).$$

Παίρνοντας το όριο για $t \to 1^-$, έπεται: $\lambda_{n+1} = 0$. Έτσι: $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j t^j (1-t)^{n-j} = 0$ για κάθε $t \in (0,1)$. Λόγω της επαγωγικής υπόθεσης ότι οι $\{t^j (1-t)^{n-j}\}_{j=0}^{n}$ είναι γραμμ. ανεξάρτητες στο $(0,1)$, έπεται: $\lambda_j = 0$ για $j = 0, \dots, n$.

β) Δείξτε ότι: $\int_0^1 B_\ell^n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$, $\ell = 0, \dots, n$.

<u>Λύση</u>:

<u>$\ell=0$</u>: $B_0^n(t) = \binom{n}{0} t^0 (1-t)^{n-0} = (1-t)^n$. Έτσι: $\int_0^1 B_0^n(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)^n ds = -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{n+1}$.

24.5

Έστω: $\ell \in \{0,\dots,n-1\}$. Τότε: $\displaystyle\int_0^1 B^n_{\ell+1}(t)\,dt = \binom{n}{\ell+1}\int_0^1 t^{\ell+1}(1-t)^{n-\ell-1}\,dt$

$$= \frac{n!}{(\ell+1)!\,(n-\ell-1)!}\left[\underbrace{-\frac{t^{\ell+1}(1-t)^{n-\ell}}{n-\ell}\Big|_{t=0}^{t=1}}_{=0} + \int_0^1 t^{\ell}(\ell+1)\frac{(1-t)^{n-\ell}}{n-\ell}\,dt\right]$$

$$= \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!}\int_0^1 t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\,dt = \binom{n}{\ell}\int_0^1 t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\,dt = \int_0^1 B^n_{\ell}(t)\,dt.$$

Συνοψίζοντας έχουμε: $\displaystyle\int_0^1 B^n_\ell(t)\,dt = \int_0^1 B^n_{\ell+1}(t)\,dt$ για $\ell=0,\dots,n-1$. Επειδή $\displaystyle\int_0^1 B^n_0(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$ έπεται ότι: $\displaystyle\int_0^1 B^n_\ell(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$ για $\ell=0,\dots,n$.

γ) Δείξτε ότι $\quad B^{n-1}_\ell(t) = \frac{n-\ell}{n}B^n_\ell(t) + \frac{\ell+1}{n}B^n_{\ell+1}(t) \quad \forall t\in[0,1],\ \ell=0,\dots,n-1,\ n\geq 1.$

<u>Λύση</u>: Έστω $t\in[0,1]$ και $\ell\in\{0,\dots,n-1\}$. Τότε έχουμε: $\frac{n-\ell}{n}B^n_\ell(t) + \frac{\ell+1}{n}B^n_{\ell+1}(t) =$

$$\frac{n-\ell}{n}\binom{n}{\ell}t^{\ell}(1-t)^{n-\ell} + \frac{\ell+1}{n}\binom{n}{\ell+1}t^{\ell+1}(1-t)^{n-\ell-1} = \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!}t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}\frac{n-\ell}{n} + \frac{\ell+1}{n}\frac{n!}{(\ell+1)!\,(n-\ell-1)}t^{\ell+1}(1-t)^{n-\ell-1}$$

24.6

$$= \frac{(n-1)!}{\ell!(n-\ell-1)!} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell} + \frac{(n-1)!}{\ell!(n-\ell-1)!} t^{\ell+1}(1-t)^{n-\ell-1}$$

$$= \binom{n-1}{\ell}\left[t^{\ell}(1-t)^{n-\ell} + t^{\ell+1}(1-t)^{n-\ell-1}\right]$$

$$= \binom{n-1}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell-1}\left[\underbrace{(1-t)+t}_{=1}\right] = \binom{n-1}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell-1} = B_{\ell}^{n-1}(t).$$

δ) Δείξτε ότι: $(B_{\ell}^{n})'(t) = n\left[B_{\ell-1}^{n-1}(t) - B_{\ell}^{n-1}(t)\right]$, $\ell = 1, \dots, n$.

<u>Λύση</u>. Έστω: $n \in \mathbb{N}$ και $\ell \in \{1, \dots, n\}$. Τότε έχουμε: $B_{\ell}^{n}(t) = \binom{n}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell}$

και $(B_{\ell}^{n})'(t) = \binom{n}{\ell}\left[\ell t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} + (n-\ell)t^{\ell}(1-t)^{n-\ell-1}\right]$

$$= n\left[\frac{(n-1)!}{\ell!(n-\ell)!}\ell\, t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} + \frac{(n-1)!}{\ell!(n-\ell)!}(n-\ell)\, t^{\ell}(1-t)^{n-\ell-1}\right]$$

$$= n\left[\frac{(n-1)!}{(\ell-1)!(n-\ell)!} t^{\ell-1}(1-t)^{n-\ell} + \frac{(n-1)!}{(n-\ell-1)!\,\ell!} t^{\ell}(1-t)^{n-\ell-1}\right]$$

24.7

$$= n\left[\binom{n-1}{\ell-1} t^{\ell-1}(1-t)^{(n-1)-(\ell-1)} - \binom{n-1}{\ell} t^{\ell}(1-t)^{n-1-\ell}\right]$$

$$= n\left[B^{n-1}_{\ell-1}(t) - B^{n-1}_{\ell}(t)\right].$$

$\blacksquare$

<u>Άσκηση 4.7.</u> Έστω $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ και $B_n f$ το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f.

α) Δείξτε ότι αν η f είναι μονότονη στο $[0,1]$, τότε η $B_n f$ είναι μονότονη.

<u>Λύση</u>: Έστω ότι $n=0$. Τότε $B_0 f(t) = f(0)$ $\forall t \in [0,1]$, επομένως η $B_0 f$ είναι μονότονη επειδή είναι σταθερή. Έστω: $n \geq 1$. Τότε έχουμε:

$$B_n f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} B^n_\ell(t) f(\ell/n) = B^n_0(t) f(0) + \sum_{\ell=1}^{n-1} B^n_\ell(t) f(\ell/n) + B^n_n(t) f(1)$$

$$= (1-t)^n f(0) + \sum_{\ell=1}^{n-1} B^n_\ell(t) f(\ell/n) + t^n f(1).$$

Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε:

§4.8

Έτσι: $(B_nf)'(t) = -n(1-t)^{n-1}f(0) + \sum_{\ell=1}^{n-1} f(\tfrac{\ell}{n})(B_\ell^n)'(t) + n t^{n-1} f(1)$

$$= -n(1-t)^{n-1}f(0) + n\sum_{\ell=1}^{n-1} f(\tfrac{\ell}{n})\left[B_{\ell-1}^{n-1}(t) - B_\ell^{n-1}(t)\right] + n t^{n-1} f(1)$$

$$= -n(1-t)^{n-1} f(0) + n\sum_{\ell=1}^{n-1} f(\tfrac{\ell}{n}) B_{\ell-1}^{n-1}(t) - n \sum_{\ell=1}^{n-1} f(\tfrac{\ell}{n}) B_\ell^{n-1}(t) + n t^{n-1} f(1)$$

$$= -n B_0^{n-1}(t) f(0) + n\sum_{\ell=0}^{n-2} f(\tfrac{\ell+1}{n}) B_\ell^{n-1}(t) - n\sum_{\ell=1}^{n-1} f(\tfrac{\ell}{n}) B_\ell^{n-1}(t) + n B_{n-1}^{n-1}(t) f(1)$$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\tfrac{\ell+1}{n}) B_\ell^{n-1}(t) - n\sum_{\ell=0}^{n-1} f(\tfrac{\ell}{n}) B_\ell^{n-1}(t) + n B_{n-1}^{n-1}(t) f(1) - n B_{n-1}^{n-1}(t) f(\tfrac{n-1+1}{n})$$

$$= n\sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{B_\ell^{n-1}(t)}_{\geq 0} \Big[\underbrace{f(\tfrac{\ell+1}{n}) - f(\tfrac{\ell}{n})}_{z_\ell}\Big] \quad \forall t\in[0,1].$$

Όταν η f είναι αύξουσα, τότε: $z_\ell \geq 0$ για $\ell=0,\dots,n-1$, και επομένως: $(B_nf)'(t)\geq 0 \ \forall t\in[0,1]$, και έτσι η B_nf είναι αύξουσα. Όταν η f είναι φθίνουσα, τότε $z_\ell\leq 0$ για $\ell=0,\dots,n-1$, και επομένως $(B_nf)'(t)\leq 0 \ \forall t\in[0,1]$, που σημαίνει ότι η B_nf είναι φθίνουσα.

24.9

β) Βρείτε τις τιμές $B_nf(0), B_nf(1), (B_nf)'(0), (B_nf)'(1)$.

Λύση: $B_nf(0) = \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(0)\, f(\tfrac{\ell}{n}) = \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} \underbrace{t^\ell}_{=0} (1-t)^{n-\ell}\Big|_{t=0} f(\ell/n) + \binom{n}{0} \underbrace{(1-t)^n}_{1}\Big|_{t=0} f(0) = f(0)$

$$B_nf(1) = \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(1)\, f(\ell/n) = \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n}{\ell} t^\ell \underbrace{(1-t)^{n-\ell}}_{=0}\Big|_{t=1} f(\tfrac{\ell}{n}) + \binom{n}{n} \underbrace{t^n}_{=1}\Big|_{t=1} f(1) = f(1)$$

Με βάση τον τύπο που βρήκαμε στο (α), για $n\geq 2$, έχουμε:

$$(B_nf)'(0) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{B_\ell^{n-1}(0)}_{\substack{=0\\ \text{όταν}\\ \ell\neq 0}} \left[f(\tfrac{\ell+1}{n}) - f(\tfrac{\ell}{n})\right] = n B_0^{n-1}(0)\,(f(1/n)-f(0))$$

$$= n \binom{n}{0} (1-t)^{n-1}\Big|_{t=0} (f(1/n)-f(0))$$

$$= n\,(f(1/n)-f(0)),$$

$$(B_nf)'(1) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} \underbrace{B_\ell^{n-1}(1)}_{\substack{=0 \text{ όταν}\\ \ell\neq n-1}} \left[f(\tfrac{\ell+1}{n}) - f(\ell/n)\right]$$

$$= n\, B_{n-1}^{n-1}(1)\, \left(f(\tfrac{n-1+1}{n}) - f(\tfrac{n-1}{n})\right) = n\left(f(1) - f(\tfrac{n-1}{n})\right).$$

Όταν $n=1$ τότε: $(B_n f)'(t) = (B_1 f)'(t) = \underbrace{B_0^0(t)}_{=1} \cdot \left[f\left(\frac{1}{1}\right) - f\left(\frac{0}{1}\right) \right] = f(1) - f(0)$ για κάθε $t \in [0,1]$. 24.10

Όταν $n=0$ τότε: $B_0 f(t) = f(0)$ $\forall t \in [0,1]$, επομένως: $(B_0 f)'(t) = 0$ $\forall t \in [0,1]$. ∎

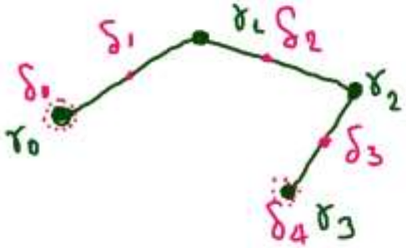
Άσκηση 4.9

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και B_Γ μια καμπύλη Bezier βαθμού n με σημεία ελέγχου $\Gamma = (\gamma_\ell)_{\ell=0}^{n}$. Έστω B_Δ η καμπύλη Bezier βαθμού $n+1$ με σημεία ελέγχου $\Delta = (\delta_\ell)_{\ell=0}^{n+1}$ όπου: $\delta_0 = \gamma_0$, $\delta_{n+1} = \gamma_n$, $\delta_\ell = \left(1 - \frac{\ell}{n+1}\right)\gamma_\ell + \frac{\ell}{n+1}\gamma_{\ell-1}$, $\ell = 1, \dots, n$.

Δείξτε ότι: $B_\Gamma(t) = B_\Delta(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$.

24.11

Λύση



$n=3$

Για κάθε $t\in[0,1]$, έχουμε:

$$B_\delta(t) = \sum_{\ell=0}^{n+1} B_\ell^{n+1}(t)\,\delta_\ell = B_0^{n+1}(t)\,\delta_0 + \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\,\delta_\ell + B_{n+1}^{n+1}(t)\,\delta_{n+1}$$

$$= B_0^{n+1}(t)\,\gamma_0 + \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\left[\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)\gamma_\ell + \frac{\ell}{n+1}\gamma_{\ell-1}\right] + B_{n+1}^{n+1}(t)\,\gamma_n$$

$$= B_0^{n+1}(t)\,\gamma_0 + \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\left(1-\frac{\ell}{n+1}\right)\gamma_\ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} B_{\ell+1}^{n+1}(t)\,\frac{\ell+1}{n+1}\gamma_\ell + B_{n+1}^{n+1}(t)\,\gamma_n$$

$$= B_0^{n+1}(t)\,\gamma_0 + \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\,\gamma_\ell - \sum_{\ell=1}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\,\frac{\ell}{n+1}\gamma_\ell + \sum_{\ell=0}^{n} B_{\ell+1}^{n+1}(t)\,\frac{\ell+1}{n+1}\gamma_\ell$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\,\gamma_\ell - \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^{n+1}(t)\,\frac{\ell}{n+1}\gamma_\ell + \sum_{\ell=0}^{n} B_{\ell+1}^{n+1}(t)\,\frac{\ell+1}{n+1}\gamma_\ell =$$

24.12

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \Big[\underbrace{B_\ell^{n+1}(t) - B_\ell^{n+1}(t)\frac{\ell}{n+1} + B_{\ell+1}^{n+1}\frac{\ell+1}{n+1}}_{J_\ell^{\prime\prime}} \Big] \gamma_\ell .$$

Παρατηρούμε ότι:

$$J_\ell = \binom{n+1}{\ell} t^\ell (1-t)^{n+1-\ell} - \binom{n+1}{\ell} t^\ell (1-t)^{n+1-\ell}\frac{\ell}{n+1} + \binom{n+1}{\ell+1}\frac{\ell+1}{n+1} t^{\ell+1}(1-t)^{n+1-\ell-1}$$

$$= t^\ell (1-t)^{n-\ell}\Big[\frac{(n+1)!}{\ell!\,(n+1-\ell)!}(1-t) - \frac{n!\,\ell}{\ell!\,(n+1-\ell)!}(1-t) + \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!}t\Big]$$

$$= \frac{t^\ell(1-t)^{n-\ell}}{\ell!\,(n+1-\ell)!}\cdot n!\,\Big[(n+1)(1-t) - \ell(1-t) + (n-\ell+1)\,t\Big]$$

$$= \frac{n!\,t^\ell(1-t)^{n-\ell}}{\ell!\,(n+1-\ell)!}\cdot (n+1-\ell)(1-t+t) = \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}, \quad \ell = 0, \dots, n.$$

Έτσι: $B_\Delta(t) = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-\ell}\gamma_\ell = B_\Gamma(t) \quad \forall t\in[0,1].$ ∎

24.13

'Ασκηση 4.10

'Εστω $n \in \mathbb{N}$ και B_r μια καμπύλη Bezier βαθμού n με σημεία ελέγχου $(\gamma_\ell)_{\ell=0}^{n}$.

Δείξτε ότι: $B_r'(t) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} (\gamma_{\ell+1} - \gamma_\ell) B_\ell^{n-1}(t) \quad \forall t \in [0,1]$.

Επιπλέον, όταν $n \geq 2$, δείξτε ότι:

$$B_r''(t) = n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} (\gamma_{\ell+2} - 2\gamma_{\ell+1} + \gamma_\ell) B_\ell^{n-2}(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Λύση:

Α. Προφανώς $B_r'(t) = \sum_{\ell=0}^{n} (B_\ell^n)'(t) \gamma_\ell$. Δουλεύουμε όπως στο (α) της 'Ασκησης 4.7 και καταλήγουμε στη σχέση: $B_r'(t) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell^{n-1}(t) \, (\gamma_{\ell+1} - \gamma_\ell)$. ($\underline{\text{Σημ}}$. Το γ_ℓ αντιστοιχεί στο $f(\ell/n)$).

24.14

Β. Έστω $n \geq 2$. Παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας την Άσκηση 4.5(δ)

έχουμε: $B''_\Gamma(t) = n \sum_{\ell=0}^{n-1} (B_\ell^{n-1})'(t)\,(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)$

$$= n\,(B_0^{n-1})'(t)\,(\gamma_1-\gamma_0) + n\sum_{\ell=1}^{n-2} (B_\ell^{n-1})'(t)\,(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell) + n\,(B_{n-1}^{n-1})'(t)\,(\gamma_n-\gamma_{n-1})$$

$$= n\,(B_0^{n-1})'(t)\,(\gamma_1-\gamma_0) + n(n-1)\sum_{\ell=1}^{n-2} (\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)\left[B_{\ell-1}^{n-2}(t) - B_\ell^{n-2}(t)\right] + n\,(B_{n-1}^{n-1})'(t)\,(\gamma_n-\gamma_{n-1})$$

$$= -n(n-1)\,(1-t)^{n-2}(\gamma_1-\gamma_0) + n(n-1)\,t^{n-2}(\gamma_n-\gamma_{n-1})$$
$$+\, n(n-1)\sum_{\ell=1}^{n-2}(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)\,B_{\ell-1}^{n-2}(t) - n(n-1)\sum_{\ell=1}^{n-2}(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)\,B_\ell^{n-2}(t)$$

$$= -n(n-1)(1-t)^{n-2}(\gamma_1-\gamma_0) + n(n-1)\,t^{n-2}(\gamma_n-\gamma_{n-1}) + n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-3}(\gamma_{\ell+2}-\gamma_{\ell+1})\,B_\ell^{n-2}(t)$$
$$-\, n(n-1)\sum_{\ell=1}^{n-2}(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)\,B_\ell^{n-2}(t)$$

$$= -n(n-1)\,B_0^{n-2}(t)(\gamma_1-\gamma_0) + n(n-1)\,B_{n-2}^{n-2}(t)(\gamma_n-\gamma_{n-1}) + n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-3}(\gamma_{\ell+2}-\gamma_{\ell+1})\,B_\ell^{n-2}(t)$$
$$-\, n(n-1)\sum_{\ell=1}^{n-2}(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)\,B_\ell^{n-2}(t) = n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}(\gamma_{\ell+2}-\gamma_{\ell+1})\,B_\ell^{n-2}(t) - n(n-1)\sum_{\ell=0}^{n-2}(\gamma_{\ell+1}-\gamma_\ell)\,B_\ell^{n-2}(t)$$

$$= n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} (\gamma_{\ell+2} - 2\gamma_{\ell+1} + \gamma_\ell) B_\ell^{n-2}(t) \quad \text{για κάθε } t \in [0,1]. \quad \blacksquare$$

24.15

<u>Άσκηση 4.8</u>. Έστω $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ με $f(t) = t^3$ για κάθε $t \in [0,1]$ και $B_n f$ το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f. Δείξτε ότι $B_n f \in \mathbb{P}^3[0,1]$ και εκτιμήστε το σφάλμα $E = \max_{t \in [0,1]} |f(t) - B_n f(t)|$.

<u>Λύση</u>. Πρώτα παρατηρούμε ότι:

$$B_0 f(t) = f(0) = 0 \quad , \quad B_1 f(t) = B_0^1(t) \underbrace{f(0)}_{=0} + B_1^1(t) f(1) = t\, f(1) = t$$

$$B_2 f(t) = B_0^2(t) \underbrace{f(0)}_{=0} + B_1^2(t) f(1/2) + B_2^2(t) f(1)$$

$$= \binom{2}{1} t(1-t) \frac{1}{8} + t^2 = \frac{t(1-t)}{4} + t^2 = \frac{3}{4} t^2 + \frac{t}{4}$$

24.16

Έστω: $n \geq 3$. Τότε:

$$B_n f(t) = \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t) \left|\frac{\ell}{n}\right|^3 = \frac{1}{n^3} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{n!}{\ell!\,(n-\ell)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell} \ell^3$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(\ell-1)!\,(n-\ell)!} t^\ell (1-t)^{n-\ell} \ell^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell!\,(n-\ell-1)!} t^{\ell+1} (1-t)^{n-1-\ell} (\ell+1)^2$$

$$= \frac{t}{n^2} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} t^\ell (1-t)^{n-1-\ell} (1+2\ell+\ell^2)$$

$$= \frac{t}{n^2} \left[\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell^{n-1}(t)}_{=1} + 2\sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell^{n-1}(t)\,\ell + \sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell^{n-1}(t)\,\ell^2 \right].$$

$$= \frac{t}{n^2} + \frac{2t}{n^2} \sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell^{n-1}(t)\,\ell + \frac{t}{n^2} \sum_{\ell=0}^{n-1} B_\ell^{n-1}(t)\,\ell^2, \quad \forall\, t \in [0,1].$$

24.17

Έχουμε ήδη δει (βλ. Διάλεξη 18) ότι:

$$\sum_{\ell=0}^{m} B_\ell^m(t)\,\ell^2 = m\cdot t + t^2 m(m-1)$$

$$\sum_{\ell=0}^{m} B_\ell^m(t)\,\ell = m\cdot t$$

για κάθε $t\in[0,1]$ και $m\geq 2$. Έτσι:

$$B_n f(t) = \frac{t}{n^2} + \frac{2t}{n^2}(n-1)t + \frac{t}{n^2}\left[(n-1)t + t^2(n-1)(n-2)\right]$$

$$= \frac{t}{n^2} + 2t^2\frac{n-1}{n^2} + \frac{n-1}{n^2}t^2 + t^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}$$

$$= \frac{t}{n^2} + 3t^2\frac{n-1}{n^2} + t^3\frac{(n-1)(n-2)}{n^2} \in \mathbb{P}^3[0,1].$$

$\boxed{24.18}$

Για κάθε $n \geq 3$ ορίζουμε: $E^n \in C([0,1];\mathbb{R})$ με: $E^n(t) = f(t) - B_n f(t)$ $\forall t \in [0,1]$.

Έτσι:
$$|E^n(t)| = \left| \frac{t}{n^2} + 3t^2\frac{n-1}{n^2} + t^3\left[1 - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\right] \right|$$

$$= \left| \frac{t}{n^2} + \frac{3(n-1)}{n^2}t^2 + t^3\,\frac{n^2-(n^2-3n+2)}{n^2} \right|$$

$$= \left| \frac{t}{n^2} + \frac{3(n-1)}{n^2}t^2 + t^3\,\frac{3n-2}{n^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} + \frac{2}{n} \leq \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2} \qquad \forall t \in [0,1].$$

Άρα: $\|E^n\|_\infty \leq \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. ∎

24.19

Άσκηση 4.4 Έστω $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ με $f(t)=\sqrt{t}$ για κάθε $t\in[0,1]$, και $B_n f$ το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f.

α). Δ.Ο. η f δεν είναι Lipschitz στο $[0,1]$.

Λύση: Η f είναι Lipschitz στο $[0,1]$ ανν το σύνολο

$$B := \left\{ \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x,y\in[0,1], x\neq y \right\}$$

είναι άνω φραγμένο. Θα κάνουμε απαγωγή σε άτοπο.

Υποθέτουμε ότι το B είναι άνω φραγμένο. Ορίζουμε στη συνέχεια το σύνολο: $A=\left\{ \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|} : x\in[0,1], x\neq 0\right\}$. Επειδή $A\subset B$, έπεται ότι το A είναι άνω φραγμένο, δηλ. υπάρχει $L\in\mathbb{R}$ τ.ω. $|f(x)-f(0)|\le L|x|$ $\forall x\in(0,1]$

$\Rightarrow \sqrt{x}\le Lx$ $\forall x\in(0,1]$ $\Rightarrow$ $1\le L\sqrt{x}$ $\forall x\in(0,1]$ $\Rightarrow$ $1\le L \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $1\le 0$.

Άτοπο.

24.20

β) Δ.Ο. υπάρχει $C>0$ τ.ω. $\|f-B_nf\|_\infty \leq C n^{-1/2}$ $\forall n\geq 1$.

Λύση Παρατηρούμε ότι: $f(t)-B_nf(t) = \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\left(f(t)-f(\ell/n)\right)$, $\forall t\in[0,1], \forall n\in\mathbb{N}$.

Για κάθε $t\in(0,1]$ και $n\in\mathbb{N}$, έπεται:

$$|f(t)-B_nf(t)| \leq \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\left|\sqrt{t}-\sqrt{\ell/n}\right| \leq \sum_{\ell=0}^{n} \underbrace{B_\ell^n(t)}_{\geq 0} \frac{|t-\ell/n|}{|\sqrt{t}+\sqrt{\ell/n}|}$$

$$\underset{C\text{-}S}{\leq} \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{B_\ell^n(t)}{(\sqrt{t}+\sqrt{\ell/n})^2}\right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\,(t-\ell/n)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq \left(\sum_{\ell=0}^{n} \frac{B_\ell^n(t)}{t}\right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\,(t-\ell/n)^2\right)^{1/2}$$

$$\leq t^{-1/2} \underbrace{\left(\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\right)^{1/2}}_{=1} \left(\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\left(t^2+\ell^2/n^2-2\frac{t\ell}{n}\right)\right)^{1/2}$$

$$\leq t^{-1/2} \left[\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\left(t^2+\frac{\ell^2}{n^2}-2\frac{t\ell}{n}\right)\right]^{1/2}.$$

$n=1$ $B_1f(t)=t$ και
$|f(t)-B_1f(t)| = |\sqrt{t}-t| = \sqrt{t}\,|1-\sqrt{t}| \le 1$
για κάθε $t\in[0,1]$

24.21

Έχουμε ήδη δείξει (βλ. Διάλεξη 18) ότι:

$$\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\left(t^2+\frac{\ell^2}{n^2}-2t\ell/n\right) = \frac{t(1-t)}{n} \quad \forall n\ge 2.$$

Έτσι: $|f(t)-B_nf(t)| \le \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{\sqrt{t}\sqrt{1-t}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ $\forall t\in(0,1]$, $\forall n\ge 2$.

Επειδή: $f(0)-B_nf(0)=0$, έπεται ότι: $\|f-B_nf\|_\infty \le 1/\sqrt{n}$ $\forall n\ge 1$ ~~$\forall n\ge 2$~~ ∎

Άσκηση 4.5. Έστω $f\in C([0,1];\mathbb{R})$ η οποία είναι Hölder συνεχής με εκθέτη $\alpha\in(0,1)$, δηλ. υπάρχει $L\ge 0$ τ.ω. $|f(x)-f(y)|\le L|x-y|^\alpha$ $\forall x,y\in[0,1]$. Αν B_nf είναι το πολυώνυμο Bernstein το οποίο αντιστοιχεί στην f, δείξτε ότι υπάρχει $C>0$ τ.ω.

$$\|f-B_nf\|_\infty \le C\,n^{-\alpha/2} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Λύση: Έστω $n\in\mathbb{N}$ και $t\in[0,1]$. Τότε:

$$|f(t)-B_nf(t)| \le \sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\,|f(t)-f(\ell/n)| \le L\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)\,|t-\ell/n|^\alpha$$

24.22

$$= L \sum_{\ell=0}^{n} \left(B_\ell^n(t)\right)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left|t - \tfrac{\ell}{n}\right|^{\alpha} \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \quad p,q>1$$

$$\leq L \left\{ \sum_{\ell=0}^{n} \left[\left(B_\ell^n(t)\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \sum_{\ell=0}^{n} \left[\left(B_\ell^n(t)\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q \left|t - \tfrac{\ell}{n}\right|^{\alpha q} \right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq L \Big[\underbrace{\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t)}_{=1} \Big]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t) \left|t - \tfrac{\ell}{n}\right|^{\alpha q} \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Διαλέγουμε: $q = \frac{2}{\alpha} > 1$ και έχουμε:

$$|f(t) - B_n f(t)| \leq L \left[\sum_{\ell=0}^{n} B_\ell^n(t) \left(t - \tfrac{\ell}{n}\right)^2 \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\leq L \left(\frac{t(1-t)}{n}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{L}{2^\alpha} \frac{1}{n^{\alpha/2}} \quad \forall n \geq 2 \ \ \forall t \in [0,1].$$

Έτσι: $\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{L}{2^\alpha} n^{-\alpha/2} \quad \forall n \geq 2.$

[Όταν $n=1$, έχουμε: $|f(t) - B_1 f(t)| = |f(t) - t f(1) - (1-t) f(0)| = |t(f(1) - f(t)) + (1-t)(f(0) - f(t))|$
$\leq L|1-t|^\alpha + L t^\alpha \leq 2L$.] ∎

Άσκηση 4.9. 24.23

Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με: $f(t)=3t^3+2t-1$ $\forall t\in[0,1]$. Βρείτε τη βέλτιστη ομοιόμορφη προσέγγιση της f από τον $\mathbb{P}^2[0,1]$.

Λύση: Αναζητούμε $p^*\in\mathbb{P}^2[0,1]$ τ.ω.

$$\max_{t\in[0,1]}|f(t)-p^*(t)| = \min_{q\in\mathbb{P}^2[0,1]}\max_{t\in[0,1]}|f(t)-q(t)|$$

$$\Leftrightarrow \max_{s\in[-1,1]}\left|f\left(\tfrac{1+s}{2}\right)-p^*\left(\tfrac{1+s}{2}\right)\right| = \min_{q\in\mathbb{P}^2[0,1]}\max_{s\in[-1,1]}\left|f\left(\tfrac{s+1}{2}\right)-q\left(\tfrac{1+s}{2}\right)\right|$$

Θέτοντας $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με: $g(s)=f\left(\frac{1+s}{2}\right)$ για κάθε $s\in[-1,1]$

και $z^*\in\mathbb{P}^2[-1,1]$ με $z^*(s)=p^*\left(\frac{s+1}{2}\right)$ για κάθε $s\in[-1,1]$, έχουμε:

$$\max_{[-1,1]}|g-z^*| = \min_{z\in\mathbb{P}^2[-1,1]}\max_{[-1,1]}|g-z|$$

Η g είναι πολυώνυμο βαθμού 3 με συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου $3/8$.

24.24

$$\frac{3}{8}\max_{[-1,1]}\left|\frac{8}{3}g-\frac{8}{3}z^*\right|$$

$$=\frac{3}{8}\min_{z\in\mathbb{P}^2[-1,1]}\max_{[-1,1]}\left|\frac{8}{3}f-\frac{8}{3}z\right|=\frac{3}{8}\min_{z\in\mathbb{P}^2[-1,1]}\max_{t\in[-1,1]}|t^3-z(t)|$$

$$=\frac{3}{8}\cdot\min_{\hat{z}\in\hat{\mathbb{P}}^3[-1,1]}\|\hat{z}\|_\infty=\frac{3}{8}\cdot\|\hat{T}_3\|_\infty$$

Έτσι: $\frac{8}{3}(g-z^*)=\hat{T}_3 \iff \frac{8}{3}(g-z^*)=\frac{1}{4}T_3 \iff g-z^*=\frac{3}{32}T_3$

$\iff z^*=g-\frac{3}{32}T_3 \iff z^*(s)=g(s)-\frac{3}{32}T_3(s) \quad \forall s\in[-1,1]$

$\iff z^*(2t-1)=g(2t-1)-\frac{3}{32}T_3(2t-1) \quad \forall t\in[0,1]$

$\iff p^*(t)=f(t)-\frac{3}{32}T_3(2t-1) \quad \forall t\in[0,1]$