Διάλεξη 3

Δευτέρα 12/10/2020 (9πμ-11πμ)

ΧΕ 2020

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΤΜΕΜ

UoC

Ορισμός: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathbb{X}=(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, $v\in V$ και $(v_n)_{n=1}^{\infty}\subset V$. Λέμε ότι η ακολουθία $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο v ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ όταν $\lim_{n\to+\infty}\|v_n-v\|=0$, και γράφουμε: $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} v$ $\square$

Ορισμός: Έστω $F_{\mathbb{X}}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $F_{\mathbb{Y}}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$,

$\mathbb{X}=(F_{\mathbb{X}},V_{\mathbb{X}},\boxplus_{\mathbb{X}},\boxdot_{\mathbb{X}},\|\cdot\|_{\mathbb{X}})$,

$\mathbb{Y}=(F_{\mathbb{Y}},V_{\mathbb{Y}},\boxplus_{\mathbb{Y}},\boxdot_{\mathbb{Y}},\|\cdot\|_{\mathbb{Y}})$ γραμμικοί χώροι με νόρμα

$A\subset V_{\mathbb{X}}$, απεικόνιση $T:A\to V_{\mathbb{Y}}$ και $w\in A$. Λέμε ότι η T είναι συνεχής στο w όταν για κάθε ακολουθία $(w_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$ με $w_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_{\mathbb{X}}} w$ ισχύει $Tw_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_{\mathbb{Y}}} Tw$. Όταν $\widetilde{A}\subset A$ και η T είναι συνεχής σε κάθε στοιχείο του $\widetilde{A}$, τότε λέμε ότι η T είναι συνεχής στο $\widetilde{A}$.

Ορισμός: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και $K\subset V$.

i) Λέμε ότι το K είναι φραγμένο όταν υπάρχει $c\geq 0$ τ.ω. $\|v\|\leq c$ $\forall v\in V$.

ii) Λέμε ότι το K είναι κλειστό όταν για κάθε ακολουθία $(v_n)_{n=1}^{\infty}\subset K$ για την οποία υπάρχει $v\in V$ τ.ω. $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} v$ ισχύει ότι $v\in K$.

iii) Λέμε ότι το σύνολο K είναι συμπαγές, όταν κάθε ακολουθία $(v_n)_{n=1}^{\infty}\subset K$ έχει υπακολουθία $(v_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $v\in K$.

<u>Παραδείγματα:</u> $(\mathbb{R},\mathbb{R},+,\cdot)$ $\|x\|=|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$K=\mathbb{R}$ είναι κλειστό αλλά δεν είναι φραγμένο

$K=[\alpha,b]$ είναι κλειστό και φραγμένο

$K=[\alpha,\beta)$ είναι φραγμένο αλλά δεν είναι κλειστό
π.χ. $x_n=\beta-\frac{\beta-\alpha}{2n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ αποτελείται από στοιχεία του K όμως $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=\beta\notin K$

$K=[\alpha,+\infty)$ ή $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές. Αρκεί να βρούμε μια
$\alpha\leq 0$ ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset K$ η οποία δεν έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. π.χ. $x_n=n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Ας υποθέσουμε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$. Αυτό σημαίνει ότι η $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη δηλ. υπάρχει $C>0$ τ.ω. $|x_{k_n}|\leq C$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow k_n\leq C$ $\forall n\in\mathbb{N}$
$\Rightarrow n\leq k_n\leq C$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\mathbb{N}$ φραγμένο. άτοπο.

<u>Πρόταση:</u> Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X=(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και $K\subset V$. Αν το K δεν είναι φραγμένο, τότε δεν είναι συμπαγές.

<u>Σημ.</u> Αυτό σημαίνει ότι ένα συμπαγές σύνολο είναι αναγκαστικά φραγμένο.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω ότι το K δεν είναι φραγμένο. Τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n\in K$ τ.ω. $\|x_n\|>n$. Έτσι κατασκευάσαμε μια ειδική ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων του K. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Αυτό θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.
Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει υποακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $x\in K$. Τότε, εφαρμόζοντας την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα έχουμε: $0\leq\big|\|x_{k_n}\|-\|x\|\big|\leq\|x_{k_n}-x\|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_{k_n}\|=\|x\|$, δηλ. η $(\|x_{k_n}\|)_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα. Έτσι η $(\|x_{k_n}\|)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη, δηλ. υπάρχει $C\geq 0$ τ.ω. $\|x_{k_n}\|\leq C$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Όμως:
$n\leq k_n\leq\|x_{k_n}\|\leq C$ $\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow\mathbb{N}$ φραγμένο
Άτοπο ∎

Πρόταση: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X=(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ είναι γραμμικός χώρος με νόρμα και $K \subset V$. Αν το K είναι συμπαγές τότε το K είναι κλειστό.

Απόδ. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ η οποία συγκλίνει στο $x \in V$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$, δηλ. $\lim_{n\to+\infty} \|x_n - x\| = 0$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι το $x \in K$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το K είναι συμπαγές.

Επειδή το K είναι συμπαγές η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\hat{x} \in K$. Επειδή η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο x, έπεται ότι η $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει στο x. Από μοναδικότητα ορίου: $x = \hat{x}$. Έτσι $x \in K$.

$$\Big(0 \le \|x - \hat{x}\| \le \underbrace{\|x - x_{k_n}\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{\|x_{k_n} - \hat{x}\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\text{Άρα: } \|x - \hat{x}\| = 0 \Rightarrow x = \hat{x} \Big)$$

∎

Σημείωση: Δείξαμε ότι K συμπαγές $\Rightarrow$ K κλειστό και φραγμένο.

Το αντίστροφο **δεν** ισχύει πάντα! Εξαρτάται αν ο γραμμικός χώρος $(F, V, +, \cdot)$ έχει πεπερασμένη διάσταση ή όχι.

Στο $\mathbb{R}$ το αντίστροφο ισχύει. Μια περίπτωση που δεν ισχύει είναι στον $(\mathbb{R}, \ell^1, +, \cdot, \|\cdot\|_1)$ όπου $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ $\forall a \in \ell^1$, με: $K = (e^n)_{n=1}^{\infty}$ με: $e_i^n = \begin{cases} 1 & \text{όταν } i = n \\ 0 & \text{όταν } i \neq n \end{cases}$ $\forall i \in \mathbb{N}$. Τότε το K είναι φραγμένο διότι $\|e^n\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |e_i^n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Όμως η $(e^n)_{n=1}^{\infty}$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία επειδή $\|e^n - e^m\|_1 = 2$ $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ (Άσκηση).

<u>Πρόταση</u>: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, $K \subset V$ συμπαγές και $A \subset K$. Όταν το A είναι κλειστό, τότε το A είναι συμπαγές. 3.6

<u>Απόδ</u>: Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο A.
Επειδή $A \subset K$, έπεται $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$. Επειδή το K είναι συμπαγές υπάρχει $x \in K$ και $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ υπακολουθία της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ τ.ω. $\|x_{k_n} - x\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Επειδή A κλειστό και η $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα ακολουθία στοιχείων του A, αναγκαστικά το όριο $x \in A$. Έτσι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στο A. Έτσι το A είναι συμπαγές. $\boxed{}$

<u>Σημ</u>: Έχει σημασία η υπόθεση A κλειστό: π.χ. στο $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ το $K = [0,1]$ είναι συμπαγές, όμως το $A = (0,1) \subset K$ δεν είναι συμπαγές.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $F_X = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $F_Y = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X = (F_X, V_X, \oplus_X, \odot_X, \|\cdot\|_X)$ και $Y = (F_Y, V_Y, \oplus_Y, \odot_Y, \|\cdot\|_Y)$ γραμμικοί χώροι με νόρμα, $T : X \to Y$ συνεχής. Αν $K \subset V_X$ είναι συμπαγές, τότε το $T(K) \subset V_Y$ είναι συμπαγές. 3.7

(<u>Σημ</u>. το $T(K)$ είναι η εικόνα του K μέσω της απεικόνισης T δηλ. $T(K) = \{Tx : x \in K\}$)

<u>Απόδ</u>: Έστω $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset T(K)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in K$ τ.ω. $T(x_n) = y_n$. Η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ως ακολουθία στοιχείων του συμπαγούς συνόλου K, έχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στο $x \in K$, δηλ. $x_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_X} x$. Επειδή η T είναι συνεχής έπεται ότι $Tx_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_Y} Tx \in T(K)$, δηλ. $y_{k_n} = Tx_{k_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\|\cdot\|_Y} Tx$. Άρα η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα στο $T(K)$ υπακολουθία. Άρα $T(K)$ συμπαγές. $\boxed{}$