4.0

Διάλεξη 4

Παρασκευή 16/10/2020

9πμ - 11πμ

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ2020

4.1

<u>Αναδρομή</u>

- $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα, $K\subset V$

  <u>αν</u> K συμπαγές <u>τότε</u> K κλειστό και φραγμένο

  Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα και έχει σχέση με το αν το V έχει πεπερασμένη διάσταση ή όχι

- $F_X=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $F_Y=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$

  $$T:(F_X,V_X,+,\cdot,\|\cdot\|_X)\xrightarrow{\text{συνεχής}}(F_Y,V_Y,+,\cdot,\|\cdot\|_Y)$$

  αν $\underbrace{K\subset V_X}_{\text{συμπαγές}}$, τότε $\underbrace{T(K)\subset V_Y}_{\text{συμπαγές}}$

- $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα, $K\subset V$ συμπαγές, $A\subset K$

  <u>αν</u> A κλειστό <u>τότε</u> A συμπαγές.

4.2

Γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ λαμβάνει στο $[\alpha,\beta]$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλ.
υπάρχουν $x_*, y_*\in[\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x_*)=\max\limits_{[\alpha,\beta]} f$ και $f(y_*)=\min\limits_{[\alpha,\beta]} f$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι αυτή την ιδιότητα την έχουν συνεχείς απεικονίσεις $T:V\to\mathbb{R}$ πάνω σε συμπαγή σύνολα $K\subset V$.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathcal{X}=(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα και $T:\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ συνεχής όπου το $\mathbb{R}$ θεωρείται ως γραμμικός χώρος $\underbrace{(\mathbb{R},\mathbb{R},+,\cdot,|\cdot|)}_{\text{υπόδειγμα!}}$
<u>Αν</u> $K\subset V$ συμπαγές

<u>τότε</u> υπάρχουν $x_*, y_*\in K$ τ.ω. $T(x_*)=\sup\limits_{v\in K} T(v)$ και $T(y_*)=\inf\limits_{v\in K} T(v)$.

<u>Σημ.</u> α) Το T καλείται συναρτησιακό επειδή απεικονίζει ένα γραμμικό χώρο στο $\mathbb{R}$

β) άρα $T(x_*)=\max\limits_{K} T$, $T(y_*)=\min\limits_{K} T$.

4.3

<u>Απόδειξη</u>:

1. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει $x_*\in K$ τ.ω. $T(x_*)=\sup\limits_{v\in K} T(v)$. Αν έχουμε αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να το εφαρμόσουμε στην απεικόνιση $-T$ η οποία είναι επίσης συνεχής. Άρα υπάρχει $y_*\in K$ τ.ω.

$$-T(y_*)=\sup_{v\in K}\,(-T(v)) \iff -T(y_*)=-\inf_{v\in K} T(v)$$
$$\iff T(y_*)=\inf_{v\in K} T(v)$$

2. Πρέπει να ξεκαθαρίσουμε ότι:

$$\sup_{v\in K} T(v) = \sup\{T(v) : v\in K\} = \sup \underbrace{T(K)}_{\subset \mathbb{R}}$$

Επειδή το K είναι συμπαγές και η T είναι συνεχής έπεται ότι το $T(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Άρα το $T(K)$ είναι κλειστό και φραγμένο.
Το γεγονός ότι είναι φραγμένο σημαίνει ότι $\sup T(K) \in \mathbb{R}$ π.χ. $\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha_*} = \sup T(K)$. (1) Θέλουμε να δείξουμε ότι $\alpha_* \in T(K)$ δηλ. $\alpha_* = T(x_*)$ για κάποιο $x_* \in K$.
Επειδή $\alpha_* = \sup T(K)$, υπάρχει ακολουθία $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset T(K)$ τ.ω. $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \alpha_*$. Επειδή $\alpha_n \in T(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n \in K$ τ.ω. $\alpha_n = T(x_n)$. Έτσι

$$\underbrace{T(x_n)}_{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \alpha_*$$

Επειδή το K είναι συμπαγές η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα στο K υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, δηλ. υπάρχει $x_* \in K$ τ.ω. $\|x_{k_n} - x_*\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Επειδή η T είναι συνεχής, έπεται ότι:

$$T(x_{k_n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T(x_*)$$

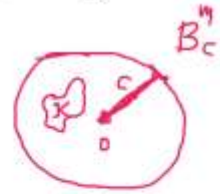
$$\Rightarrow \quad \alpha_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} T(x_*).$$

Η $(\alpha_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι υπακολουθία της $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στο α_*. Άρα: $\alpha_{k_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{|\cdot|} \alpha_*$. Από μοναδικότητα ορίου: $\alpha_* = T(x_*)$ δηλ. $T(x_*) = \sup T(K)$ ∎

Θεώρημα (Heine-Borel).

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$: κάθε σύνολο $K \subset \mathbb{R}^m$ το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο στο $\boxed{(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)}$ είναι συμπαγές.

Σημ. $\|v\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |v_i|$ για κάθε $v \in \mathbb{R}^m$.



Απόδειξη:

Ιδέα. Θα γίνει με επαγωγή ως προς m. Επειδή το K είναι φραγμένο υπάρχει $c > 0$ τ.ω $\|z\|_\infty \le c \;\; \forall z \in K$. Άρα: $K \subset \boxed{B_c^m = \{v \in \mathbb{R}^m : \|z\|_\infty \le c\}}$.

Αρκεί να αποδείξω ότι το B_c^m είναι συμπαγές για κάθε $c > 0$, διότι το K θα είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς.

1. $\boxed{m=1}$ $\quad (\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, \underset{\|\cdot\|_\infty \text{ στο } \mathbb{R}}{|\cdot|})$

Έστω $c > 0$ και $B_c^1 := \{x \in \mathbb{R} : |x| \le c\} = [-c, c]$.
Θέλουμε να δείξουμε ότι το B_c^1 είναι συμπαγές.

Έστω $(x_n)_{n=1}^\infty \subset B_c^1$. Τότε $|x_n| \le c \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι φραγμένη, άρα, λόγω του Bolzano-Weierstrass, υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$ με όριο $x_* \in \mathbb{R}$. Επειδή: $-c \le x_{k_n} \le c \;\; \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow -c \le x_* \le c \Rightarrow x_* \in [-c, c] = B_c^1$.

2 $\boxed{m \to m+1}$ Υποθέτουμε: $\mathcal{K}_c^m$ είναι συμπαγές για κάθε $c>0$. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι το B_c^{m+1} είναι συμπαγές για κάθε $c>0$. 4.8

Έστω $c>0$! Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \underbrace{B_c^{m+1}}_{\subset \mathbb{R}^{m+1}}$. Άρα τα στοιχεία της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ έχουν τη μορφή: $x_n = (\underbrace{y_n}_{\in \mathbb{R}^m}, \underbrace{z_n}_{\in \mathbb{R}})^T$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Επειδή

$$x_n \in \mathcal{K}_c^{m+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \to \|x_n\|_\infty \le c \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le i \le m+1} |(x_n)_i| \le c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|y_n\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le m} |(x_n)_i| \le c \\ |z_n| = |(x_n)_{m+1}| \le c \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Όμως B_c^1, B_c^m είναι συμπαγή

Επειδή $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset B_c^1$ υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(z_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ με όριο $z_* \in B_c^1$ δηλ. $|z_*| \le c$. Η $(y_{k_n})_{n=1}^{\infty} \subset B_c^m$ και η

επαγωγική υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχει υπακολουθία 4.9

$(y_{k_{\lambda_n}})_{n=1}^{\infty}$ της $(y_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει στο $y_* \in B_c^m$ δηλ. $\|y_*\|_\infty \le c$. Ορίζοντας $x^* = (\underbrace{y_*}_{\in \mathbb{R}^m}, \underbrace{z_*}_{\in \mathbb{R}})^T \in \mathbb{R}^{m+1}$ τότε:

$$\|x_{k_{\lambda_n}} - x^*\|_\infty = \max_{1 \le i \le m+1} |(x_{k_{\lambda_n}})_i - (x_*)_i|$$

$\boxed{\|x\|_\infty \le \|x\|_1}$

$$\le \sum_{i=1}^{m+1} |(x_{k_{\lambda_n}})_i - (x_*)_i|$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} |(x_{k_{\lambda_n}})_i - (x_*)_i| + |(x_{k_{\lambda_n}})_{m+1} - (x_*)_{m+1}|$$

$$\le \sum_{i=1}^{m} |(y_{k_{\lambda_n}})_i - (y_*)_i| + |\underline{z_{k_{\lambda_n}} - z_*}| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Δείξαμε ότι κάθε ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ B_c^{m+1} έχει υπακολουθία $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει σε $x_* \in B_c^{m+1}$. Έτσι το B_c^{m+1} είναι συμπαγές ∎

Το τελευταίο θεώρημα που θα αποδείξουμε είναι μία γενικευμένη μορφή του Heine-Borel η οποία έχει την εξής διατύπωση:

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα με V να έχει πεπερασμένη διάσταση, και K κλειστό και φραγμένο. Τότε: K είναι συμπαγές.

<u>Ιδέα:</u> V πεπ. διάσταση, $\underset{\in \mathbb{N}}{N=\dim(V)}$, $\underset{\text{βάση}}{\mathcal{B}=\{v_j\}_{j=1}^{N}}$ $\underset{\in V}{v} = \sum_{j=1}^{N} \overset{\in F}{\lambda_j} v_j$

#

$$F^N \xrightarrow[\text{επί}]{1-1} V$$

$$(\lambda_j)_{j=1}^{N} \longleftrightarrow \underset{\in V}{x} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j$$

#