5.0

Διάλεξη 5

Δευτέρα 19/10/2020

(9πμ – 11πμ)

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

5.1

Στο περασμένο μάθημα αποδείξαμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα: Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $\mathbb{X} = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^m, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ όπου: $\|x\|_\infty = \max_{1 \le j \le m} |x_j|$. Κάθε $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^m$, το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{X}$, είναι συμπαγές. (Θεώρημα Heine-Borel)

Πόρισμα: Έστω $m \in \mathbb{N}$, $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $\mathbb{X} = (F, \mathbb{C}^m, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$. Κάθε $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}^m$ κλειστό και φραγμένο στο $\mathbb{X}$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη

Ιδέα: Να ακολουθήσουμε τον ορισμό συμπαγείας ενός συνόλου.

Έστω $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}$. Ο σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε κάποιο στοιχείο του $\mathcal{K}$.

5.2

Επειδή: $z_n \in \mathbb{C}^m$ $\forall n \in \mathbb{N}$, το γράφουμε στη μορφή $z_n = \alpha_n + i b_n$ όπου: $\alpha_n, b_n \in \mathbb{R}^m$ δηλ. $\alpha_n = \operatorname{Re} z_n$ και $b_n = \operatorname{Im} z_n$. Επειδή το K είναι φραγμένο, υπάρχει σταθερά $C>0$ τ.ω. $\|x\|_\infty \le C$ $\forall x \in K$. Άρα:

$$\|z_n\|_\infty \le C \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \max_{1 \le j \le m} |(z_n)_j| \le C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le j \le m} |(\alpha_n)_j + i(b_n)_j| \le C \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \max_{1 \le j \le m} \left[|(\alpha_n)_j|^2 + |(b_n)_j|^2\right]^{1/2} \le C \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{\begin{matrix}|\operatorname{Re} z| \le |z| \\ |\operatorname{Im} z| \le |z|\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max_{1 \le j \le m} |(\alpha_n)_j| \le C \\ \max_{1 \le j \le m} |(b_n)_j| \le C \end{cases} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{matrix}\|\alpha_n\|_\infty \le C \\ \|b_n\|_\infty \le C\end{matrix} \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

5.3

Έτσι: ορίζοντας $B_C^m := \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\|_\infty \le C\}$ βλέπουμε ότι: $\alpha_n, b_n \in B_C^m$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Δείξαμε στην απόδειξη του ④. Heine-Borel ότι το B_C^m είναι συμπαγές. Επομένως η $(\alpha_n)_{n=1}^\infty$ έχει υπακολουθία $(\alpha_{k_n})_{n=1}^\infty$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\alpha_* \in B_C^m$. Και η $(b_{k_n})_{n=1}^\infty$ έχει υπακολουθία $(b_{k_{\lambda_n}})_{n=1}^\infty$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $b_* \in B_C^m$! Έτσι: $\alpha_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} \alpha_*$ και $b_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} b_*$

Έστω $z_* = \alpha_* + i b_* \in \mathbb{C}^m$. Τότε:

$$\|z_{k_{\lambda_n}} - z_*\|_\infty = \|\alpha_{k_{\lambda_n}} + i b_{k_{\lambda_n}} - \alpha_* - i b_*\|_\infty$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \le \|\alpha_{k_{\lambda_n}} - \alpha_*\|_\infty + \|b_{k_{\lambda_n}} - b_*\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Επειδή το K είναι κλειστό: $z_* \in K$. ∎

Θεώρημα: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $X = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Αν ο $(F, V, +, \cdot)$ έχει πεπερασμένη διάσταση τότε κάθε $K \subset V$ το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο είναι συμπαγές.

Απόδειξη

1. Επειδή ο $(F, V, +, \cdot)$ έχει πεπερασμένη διάσταση π.χ. $\dim(V) = N$, έχει βάση $\{v_j\}_{j=1}^{N}$. Έτσι για κάθε $v \in V$ υπάρχει μοναδικό $\lambda \in F^N$ τ.ω. $v = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j$.

Έτσι ορίζουμε την απεικόνιση: $T : F^N \to V$ με: $T(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j$ $\forall \lambda \in F^N$. Η T είναι 1-1 και επί. Επιπλέον είναι γραμμική $\boxed{\text{δηλ. } T(\lambda + \rho\mu) = T(\lambda) + \rho T(\mu) \ \forall \lambda, \mu \in F^N, \rho \in \mathbb{C}}$

Έστω $K \subset V$ το οποίο είναι κλειστό και φραγμένο στο X. Βλέπουμε το F^N ως γραμμικό χώρο με νόρμα $(F, F^N, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$. Τέλος ορίζουμε $M \subset F^N$ με: $M = T^{-1}(K) \Leftrightarrow M = \{\lambda \in F^N : T\lambda \in K\}$ $\Leftrightarrow T(M) = K$. Αν δείξουμε ότι η T είναι συνεχής και το M συμπαγές, τότε το $K = T(M)$ είναι συμπαγές. Επειδή $M \subset F^N$ αρκεί να δείξουμε ότι το M είναι κλειστό και φραγμένο.

2. T συνεχής: Έστω $\lambda, \mu \in F^N$. Τότε:

$$\|T\lambda - T\mu\| = \Big\|\sum_{j=1}^{N} (\lambda_j - \mu_j) v_j\Big\| \leq \sum_{j=1}^{N} |\lambda_j - \mu_j| \|v_j\| \leq \|\lambda - \mu\|_\infty \sum_{j=1}^{N} \|v_j\|$$

σταθερά

Έτσι: $\lambda_n \to \mu \Rightarrow T\lambda_n \to T\mu$.

5.6

2. M είναι κλειστό

Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset M$ με όριο $x \in F^N$ δηλ.

$\|x_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $x \in M$.

Τότε $(Tx_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$. Επειδή η T είναι συνεχής έπεται

ότι: $\underline{Tx_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} Tx}$. Επειδή το K είναι κλειστό έπεται $\underline{Tx \in K}$.

Άρα: $x \in M$

3. M είναι φραγμένο

Εδώ ψάχνουμε: $c > 0$ τ.ω. $\|\lambda\|_\infty \leq c \quad \forall \lambda \in M$.

5.7

Έστω: $\lambda \in F^N$ και $\lambda \neq 0$. Τότε:

$$\|T\lambda\| = \Big\| T\Big(\frac{\lambda}{\underbrace{\|\lambda\|_\infty}_{\neq 0}} \cdot \|\lambda\|_\infty\Big)\Big\|$$

$$\stackrel{\text{Γραμμ.}}{=} \Big\| \|\lambda\|_\infty \, T\big(\lambda/\|\lambda\|_\infty\big)\Big\|$$

$$= \|\lambda\|_\infty \cdot \Big\|T\big(\underbrace{\lambda/\|\lambda\|_\infty}_{\|\lambda/\|\lambda\|_\infty\|_\infty = 1}\big)\Big\|$$

$$\geq \|\lambda\|_\infty \cdot \inf_{\mu \in S} \|T\mu\|$$

όπου: $S = \{\mu \in F^N : \|\mu\|_\infty = 1\}$. Το S είναι

κλειστό και φραγμένο (Το ότι είναι φραγμένο είναι προφανές.

Αν $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset S^1$ με όριο $y \in F^N$. Τότε: 5.8

$$\|y_n - y\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Από αντίστροφη τριγ. ανισότητα:

$$\big|\|y_n\|_\infty - \|y\|_\infty\big| \le \|y_n - y\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow \big|\underbrace{\|y_n\|_\infty}_{=1} - \|y\|_\infty\big| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \big|1 - \|y\|_\infty\big| = 0 \Rightarrow \|y\|_\infty = 1 \Rightarrow y \in S^1 \,)$$

5.9

Έτσι το $S^1 \subset F^N$ είναι συμπαγές. Επειδή η $\varphi : F^N \to \mathbb{R}$ με: $\varphi(\lambda) = \|T(\lambda)\|$ $\forall \lambda \in F^N$ είναι συνεχής

$$\Big(|\varphi(\lambda) - \varphi(\mu)| = \big|\|T(\lambda)\| - \|T(\mu)\|\big| \le \|T\lambda - T\mu\| \le \|\lambda - \mu\|_\infty \sum_{j=1}^{N} \|v_j\| \Big)$$

υπάρχει $s^* \in S^1$ τ.ω. $\inf_{\lambda \in S^1} \|T\lambda\| = \|Ts^*\|$.

Ισχύει ότι: $\|Ts^*\| > 0$ [διότι αν $\|Ts^*\| = 0$ τότε $Ts^* = 0$ $\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{N} s_j^* v_j = 0 \Rightarrow s_j^* = 0$ $j = 1, \dots, N \Rightarrow s^* = 0 \Rightarrow \|s^*\|_\infty = 0$ $\Rightarrow s^* \notin S^1$ άτοπο]

Έτσι:

$$\|T\lambda\| \geq \|\lambda\|_\infty \inf_{v \in S} \|Tv\|$$

$$\geq \|\lambda\|_\infty \underbrace{\|Ts^*\|}_{>0} \quad \forall \lambda \in F^N,\ \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow \quad \|\lambda\|_\infty \leq \frac{\|T\lambda\|}{\|Ts^*\|} \quad \forall \lambda \in F^N,\ \lambda \neq 0.$$

Όμως $\mathcal{K}$ φραγμένο άρα υπάρχει $c>0$ τ.ω $\|w\| \leq c \ \forall w \in \mathcal{K}$. Επειδή $T\lambda \in \mathcal{K} \ \forall \lambda \in \underline{M}$, έχουμε ότι: $\|T\lambda\| \leq c \ \forall \lambda \in \underline{M}$. Έτσι: $\|\lambda\|_\infty \leq \frac{c}{\|Ts^*\|}$ για κάθε $\lambda \in \underline{M} \setminus \{0\}$. Όταν $\lambda = 0$ τότε $\|\lambda\|_\infty = 0 \leq \frac{c}{\|Ts^*\|}$

Κεφ. 2

Βέλτιστη προσέγγιση

Ορισμός: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathcal{X} = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, $\mathcal{K} \subset V$ και $v \in V$. Λέμε ότι το $y_* \in \mathcal{K}$ είναι μία βέλτιστη προσέγγιση του x από το $\mathcal{K}$ όταν:

$$\|x - y_*\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in \mathcal{K}. \quad \blacksquare$$

Σημ. Η ποσότητα: $\inf_{y \in \mathcal{K}} \|x-y\|$ καλείται απόσταση του x από το $\mathcal{K}$ ως προς την νόρμα $\|\cdot\|$ και γράφουμε:

$$\mathrm{dist}(x, \mathcal{K}) = \inf_{y \in \mathcal{K}} \|x-y\|.$$

Άρα η ύπαρξη της βέλτιστης προσέγγισης $y_* \in K$ του x από το K σημαίνει 5.12

$$dist(x,K) = \|x-y_*\|$$

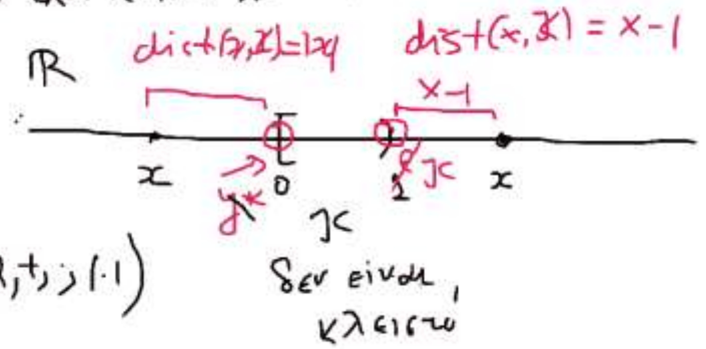
δηλ. το inf είναι min.

Παρ. Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι πως μπορούμε να φτιάξουμε βέλτιστες προσεγγίσεις μιας συνάρτησης $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ από πολυωνυμικούς χώρους ή γενικά από χώρους συναρτήσεων πεπερασμένης διάστασης.

Σημ. 5.13

Γενικά το πρόβλημα της βέλτιστης προσέγγισης δεν έχει πάντα λύση.

π.χ. $V = \mathbb{R}$



$X = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot, |\cdot|)$ δεν είναι κλειστό

Επομένως χρειαζόμαστε K κλειστό (διαισθητική διαπίστωση).

$\boxed{5.14}$

$$0 \leq \tilde{d} = dist(x, K) = \inf_{y \in K} \|x-y\|$$

Υπάρχει $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ τ.ω

$$\|x-y_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} d.$$

<u>Ερ.</u> αν η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε κάποιο $y_* \in K$ ή έχει κάποια υπακολουθία με όριο $y_* \in K$.

Άρα, για να είμαι σίγουρος ότι $y_* \in K$, χρειάζεται K κλειστό.