Διάλεξη 6

Τετάρτη 21/10/2020

(9πμ – 11πμ)

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

Αναδρομή:

- Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα. Επιπλέον, έστω $\emptyset \neq K \subset V$ και $x \in V$. Λέμε ένα στοιχείο $y_* \in K$ είναι μία βέλτιστη προσέγγιση του x από το K ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ όταν:

$$\|x - y_*\| \leq \|x - y\| \quad \forall y \in K$$

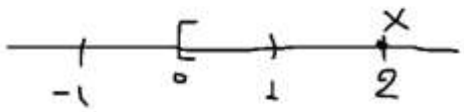
$$\Leftrightarrow \|x - y_*\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

$$\Leftrightarrow \|x - y_*\| = \min_{y \in K} \|x - y\|.$$

Γενικά, χωρίς επιπλέον υποθέσεις δεν είναι σίγουρο ότι τέτοιο $y_* \in K$ υπάρχει όπως και όταν υπάρχει ότι είναι μοναδικό.

6.2

<u>Παράδειγμα 1</u>: $F=\mathbb{R}$ $\quad (\mathbb{R},\mathbb{R},+,\cdot,|\cdot|)$ $\quad x=2$, $\mathcal{K}=[0,1)$



Τότε δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από το $\mathcal{K}$

Αν $x=-1$ τότε η βέλτιστη προσέγγιση είναι:

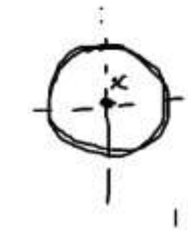
$y_x=0\in\mathcal{K}$. $\square$

<u>Παράδειγμα 2</u>:

$F=\mathbb{R}$

$(\mathbb{R},\mathbb{R}^2,+,\cdot,\|\cdot\|_2)$

↳ ευκλείδεια νόρμα $\|x\|_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$



$\mathcal{K}=\{x\in\mathbb{R}^2 : \|x\|_2=1\}$

$x=(0,0)$

Τότε $\|x-y\|_2=1$ $\forall y\in\mathcal{K}$.

Άπειρα σημεία του $\mathcal{K}$ είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από το $\mathcal{K}$.

6.3

Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ και $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Επίσης, έστω $x\in V$ και $\mathcal{K}\subset V$. Τότε υπάρχει πάντα η ποσότητα $\underset{\in[0,+\infty)}{\mathrm{dist}(x,\mathcal{K})}=\inf\limits_{y\in\mathcal{K}}\|x-y\|$, διότι

το σύνολο $\{\|x-y\| : y\in\mathcal{K}\}$ είναι κάτω φραγμένο από το 0. Από τον ορισμό του inf υπάρχει ακολουθία $(y_n)_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{K}$ τ.ω. $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x-y_n\|=\mathrm{dist}(x,\mathcal{K})$. Το ερώτημα εδώ είναι

αν η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $\mathcal{K}$ ή έχει υπακολουθία η οποία συγκλίνει στο $\mathcal{K}$. Αυτό μας φέρνει κοντά στην έννοια της συμπάγειας.

Θεώρημα (ύπαρξης βέλτιστης προσέγγισης)

Έστω $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(\mathbb{F}, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος μετά νόρμα, $K \subset V$ συμπαγές και $x \in V$. Τότε υπάρχει $y_* \in K$ τ.ω. $\|x - y_*\| = \inf_{y \in K} \|x - y\|$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του inf υπάρχει $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset K$ τ.ω. $\lim_{n \to +\infty} \|x - y_n\| = d$ όπου: $d := \inf_{y \in K} \|x - y\|$. Επειδή το K είναι συμπαγές έπεται ότι η $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ έχει υπακολουθία $(y_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $y_* \in K$ δηλ. $\|y_{k_n} - y_*\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Προφανώς: $\boxed{\|x - y_*\| \geq d}$ καθώς $y_* \in K$.

Επιπλέον: $\|x - y_*\| \leq \|x - y_{k_n}\| + \|y_{k_n} - y_*\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \|x - y_*\| \leq \lim_{n \to +\infty} \|x - y_{k_n}\| + \lim_{n \to +\infty} \|y_{k_n} - y_*\|$$

$$\Rightarrow \|x - y_*\| \leq d + 0 = d.$$

Έτσι: $\|x - y_*\| = d = \inf_{y \in K} \|x - y\|$. ∎

Θεώρημα (ύπαρξη βέλτιστης προσέγγισης. II)

Έστω: $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του $(F,V,+,\cdot)$ με πεπερασμένη διάσταση, $\phi \neq K \subseteq Y$ κλειστό. και $x \in V$. Τότε υπάρχει $y_* \in K$ τ.ω. $\|x-y_*\| = \inf\limits_{y\in K} \|x-y\|$.

Απόδ.

Ιδέα: Να βρούμε σύνολο $\tilde{K} \subset K$ το οποίο να είναι συμπαγές και: $\inf\limits_{y\in K}\|x-y\| = \inf\limits_{\tilde{y}\in\tilde{K}} \|x-\tilde{y}\|$.

1. Έστω ότι υπάρχει $y_* \in K$ τ.ω. $\|x-y_*\| = \inf\limits_{y\in K}\|x-y\|$. Επειδή $K \neq \phi$ υπάρχει $z \in K$. Έτσι έχουμε τα ακόλουθα:

$$\|x-y_*\| \leq \|x-z\|$$

$$\overset{\text{αντιστροφη}}{\Rightarrow} \quad \big|\|x\|-\|y_*\|\big| \leq \|x-z\|$$

τριγ.

$$\Rightarrow \quad \|y_*\| - \|x\| \leq \|x-z\|$$

$$\Rightarrow \quad \|y_*\| \leq \underbrace{\|x\| + \|x-z\|}_{= c \geq 0}$$

Όταν $x \in K$ τότε το $y_* = x$ είναι, προφανώς, η μοναδική βέλτιστη προσέγγιση του x από το K καθώς, $dist(x,K)=0$ και $\|x-y_*\| = \|x-x\| = 0$.

6.8

Γι' αυτό το λόγο περιοριζόμαστε στην περίπτωση όπου $x \notin \mathcal{K}$.
Τότε: $\|x-\underbrace{z}_{\in \mathcal{K}}\|>0$ και $c := \|x-z\|+\|x\|>0$. Έτσι αν $y_* \in \mathcal{K}$ και $\|x-y_*\| = \operatorname{dist}(x,\mathcal{K})$, τότε: $y_* \in B := \{w \in V : \|w\| \le c\}$. Τελικά $y_* \in \widetilde{\mathcal{K}} := \mathcal{K} \cap B$.
Επειδή $\|z\| \le \|z-x\|+\|x\| = c$, έπεται ότι: $z \in B$. Άρα: $z \in \mathcal{K} \cap B$ που σημαίνει ότι $\widetilde{\mathcal{K}} \neq \emptyset$.

2. Επειδή το B είναι φραγμένο, έπεται ότι το $\widetilde{\mathcal{K}}$ είναι φραγμένο επειδή $\widetilde{\mathcal{K}} \subset B$.
Επειδή το B είναι κλειστό και το $\mathcal{K}$ είναι κλειστό έπεται ότι το $\widetilde{\mathcal{K}}$ είναι κλειστό επειδή είναι η τομή δύο κλειστών συνόλων. Έτσι το $\widetilde{\mathcal{K}}$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Y και επομένως είναι συμπαγές στον $(F,Y,+,\cdot,\|\cdot\|)$ επειδή ο $(F,Y,+,\cdot)$ έχει πεπερασμένη διάσταση (Θ. Heine-Borel).

6.9

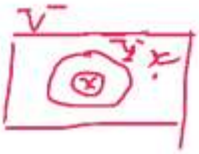
3. Επειδή το $\widetilde{\mathcal{K}}$ είναι συμπαγές, από το προηγούμενο θεώρημα έπεται ότι υπάρχει $z_* \in \widetilde{\mathcal{K}}$ τ.ω. $\|x-z_*\| = \inf_{p \in \widetilde{\mathcal{K}}} \|x-p\|$. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $v_* \in \mathcal{K}$ τ.ω. $\|x-v_*\| < \|x-z_*\|$. Τότε:
$\|v_*\| \le \|v_*-x\|+\|x\| \le \|x-z_*\|+\|x\| \underbrace{\le}_{z \in \widetilde{\mathcal{K}}} \|x-z\|+\|x\| = c$, το οποίο σημαίνει ότι $v_* \in B$. Έτσι: $v_* \in B \cap \mathcal{K} = \widetilde{\mathcal{K}}$ και $\|x-v_*\| \ge \|x-z_*\|$. Άτοπο. Άρα: $\|x-y\| \ge \|x-z_*\|$ για κάθε $y \in \mathcal{K}$, το οποίο σημαίνει ότι: $\inf_{y \in \mathcal{K}} \|x-y\| \ge \|x-z_*\|$.
Επειδή $z_* \in \widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$ έπεται: $\|x-z_*\| \ge \inf_{y \in \mathcal{K}} \|x-y\|$. Έτσι:
$\inf_{y \in \mathcal{K}} \|x-y\| = \|x-z_*\|$, το οποίο εξασφαλίζει ότι το $z_* \in \widetilde{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K}$ είναι μία βέλτιστη προσέγγιση του x από το $\mathcal{K}$ (όταν $x \notin \mathcal{K}$).
■

Παρ. Μπορούμε να έχουμε $\mathcal{K} = Y$ δηλ. το $\mathcal{K}$ μπορεί να είναι ο υπόχωρος Y διότι οι υπόχωροι πεπ. διάστασης είναι κλειστά υποσύνολα του V.

ΕΡΩΤΗΜΑ: Είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι ο Y έχει πεπ. διάσταση? [6.10]

Απάντηση: ΝΑΙ.

Παρ. $F=\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \overbrace{C([0,\tfrac{1}{2}],\mathbb{R})}^{V}, +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$



$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f(x)|.$$

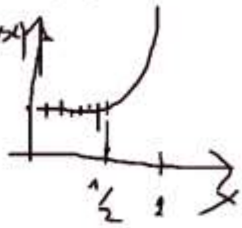
$Y = P[0,\tfrac{1}{2}]$ = το σύνολο των πολυωνύμων (οποιουδήποτε βαθμού) περιορισμένων στο $[0,\tfrac{1}{2}]$.

$Y =$

Θεωρ.

x $f:[0,\tfrac{1}{2}]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ $\in C([0,\tfrac{1}{2}];\mathbb{R})$

$\notin Y$



Ξέρουμε: $f(x)=\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \forall x\in[0,\tfrac{1}{2}]$ [6.11]

(ομοιόμορφη σύγκλιση)

Θεω. τν $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} x^n$, $\forall N\in\mathbb{N}$. Τότε:

$$\|f-S_N\|_\infty \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Όμως: $S_N \in P^N[0,\tfrac{1}{2}] \subset P[0,\tfrac{1}{2}]$, $\forall N\in\mathbb{N}$.

Άρα: $\lim_{N\to+\infty} \|f-S_N\|_\infty = 0 \Rightarrow \inf_{p\in P[0,\frac{1}{2}]} \|f-p\|_\infty = 0$

Επειδή η f δεν είναι πολυώνυμο δεν υπάρχει $p_* \in P[0,\tfrac{1}{2}]$ τ.ω $\underbrace{\|f-p_*\|_\infty}_{\neq 0} = dist(f, P[0,\tfrac{1}{2}]) = 0$. ∎