7.0

Διάλεξη 7

Δευτέρα 26/10/2020

(9πμ – 11πμ)

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

7.1

Αναδρομή

$F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ γραμμ. χώρος με νόρμα, $K \subset V$, $x \in V$.

Δείξαμε ότι όταν: α) το K είναι συμπαγές τότε υπάρχει $x_* \in K$ τ.ω. $\|x - x_*\| = dist(x, K)$

β) όταν το K είναι κλειστό υποσύνολο υποχώρου $Y \subset V$ με πεπερασμένη διάσταση τότε υπάρχει $x_* \in K$ τ.ω. $\|x - x_*\| = dist(x, K)$.

Μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης

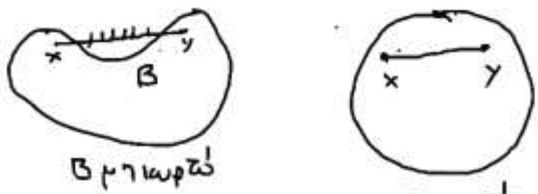
Γενικά η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης εξαρτάται από το αν η νόρμα είναι "αυστηρά κυρτή".

Ορισμός (κυρτό σύνολο)

1 Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot)$ ένας γραμμικός χώρος και $B\subset V$ μη κενό.

Λέμε ότι το B είναι κυρτό όταν:

$$\forall x,y\in B,\ \forall \lambda\in[0,1]:\ \lambda x+(1-\lambda)y\in B.$$



B μη κυρτό

B κυρτό.

Αν: $f:B\to\mathbb{R}$ και B κυρτό σύνολο

λέμε ότι η f είναι κυρτή όταν:

$$\forall\lambda\in[0,1],\ \forall x,y\in B:\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

και αυστηρά κυρτή όταν:

$$\forall\lambda\in(0,1),\ \forall x,y\in B:\ f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Ορισμός (αυστηρά κυρτή νόρμα)

1 Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα.

Λέμε ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή όταν για κάθε $x,y\in V$ με: $x\neq y$, $\|x\|=\|y\|=1$, ισχύει ότι: $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|<1\quad\forall\lambda\in(0,1)$.

$$< \lambda\underbrace{\|x\|}_{1}+(1-\lambda)\underbrace{\|y\|}_{1}=1$$

Σημ. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται στη βιβλιογραφία με τον όρο ότι η μοναδιαία μπάλα $B=\{v\in V:\|v\|\le1\}$ είναι αυστηρά κυρτή.

Παρ. $(\mathbb{R},\mathbb{R}^2,+,\cdot,\|\cdot\|_2)$

δε βρίσκεται στο σύνορο του B δηλ. στην περιφέρεια του κύκλου.

Σημ.: $\varphi:V\to\mathbb{R}$ με: $\varphi(x)=\|x\|$ $\forall x\in V$. $B\subset V$ κυρτό. Τότε:

$$\forall\lambda\in[0,1],\forall x,y\in B:\ \varphi(\underbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}_{\in B})=\|\underbrace{\lambda}_{\ge0} x+\underbrace{(1-\lambda)}_{\ge0}y\|\le\lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\|=\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y).$$

Αν $B \subset V$ είναι κυρτό σύνολο, τότε η $\varphi(x)=\|x\|$ $\forall x\in B$. 7.4
είναι κυρτή στο B.

Πρόταση: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα.
Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή

ii) $\forall x,y\in V$ με $x\neq y$ και $\|x\|=\|y\|=1$, ισχύει $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|<1$

Απόδειξη:

$(i)\Rightarrow(ii)$: Έστω $x,y\in V$ με $\|x\|=\|y\|=1$ και $x\neq y$. Τότε
$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|<1$ $\forall \lambda\in(0,1)$. Για $\lambda=\frac{1}{2}$ έπεται:
$\|\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\|<1 \Leftrightarrow \|\frac{1}{2}(x+y)\|<1$.

7.5

$(ii)\Rightarrow(i)$.

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η (ii). Έστω ότι η (i) δεν ισχύει, δηλ. η $\|\cdot\|$ δεν είναι αυστηρά κυρτή. Με βάση τον ορισμό, έπεται ότι υπάρχουν $x,y\in V$ με: $x\neq y$, $\|x\|=\|y\|=1$, και $\hat\lambda\in(0,1)$ με $\hat\lambda\neq\frac{1}{2}$
τ.ω. $\|\hat\lambda x+(1-\hat\lambda)y\|\geq 1$. Επειδή: $\|\hat\lambda x+(1-\hat\lambda)y\|$
$\leq \hat\lambda\|x\|+(1-\hat\lambda)\|y\| = \hat\lambda+1-\hat\lambda=1$, έπεται: $\|\hat\lambda x+(1-\hat\lambda)y\|=1$.

Επειδή $x\neq\hat\lambda x+(1-\hat\lambda)y \Leftrightarrow (1-\hat\lambda)x\neq(1-\hat\lambda)y \Leftrightarrow x\neq y$ και
$\|x\|=1$, $\|\hat\lambda x+(1-\hat\lambda)y\|=1$, από το (ii) έπεται ότι:
αν $\alpha=\dfrac{x+\hat\lambda x+(1-\hat\lambda)y}{2}$ τότε $\|\alpha\|<1$.

7.6

Επιπλέον: αν $b = \dfrac{y + \hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y}{2}$ τότε $\|b\| < 1$, επειδή

$$y \neq \hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y \Leftrightarrow (1-1+\hat{\lambda})y \neq \hat{\lambda}x \Leftrightarrow y \neq x$$

$\|y\| = 1, \quad \|\hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y\| = 1.$

Όμως:

$$\hat{\lambda}\alpha + (1-\hat{\lambda})b = \hat{\lambda}\,\frac{x+\hat{\lambda}x+(1-\hat{\lambda})y}{2} + (1-\hat{\lambda})\,\frac{y+\hat{\lambda}x+(1-\hat{\lambda})y}{2}$$

$$= x\left[\frac{\hat{\lambda}}{2} + \frac{\cancel{\hat{\lambda}^2}}{2} + \frac{\hat{\lambda} - \cancel{\hat{\lambda}^2}}{2}\right] + y\left[\frac{\cancel{\hat{\lambda}} - \hat{\lambda}^2}{2} + \frac{1-\cancel{\hat{\lambda}}}{2} + \frac{1+\hat{\lambda}^2 - 2\hat{\lambda}}{2}\right]$$

$$= \hat{\lambda}x + y\left[\frac{2-2\hat{\lambda}}{2}\right] = \hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y. \text{ Έτσι:}$$

$$1 = \|\hat{\lambda}x + (1-\hat{\lambda})y\| = \|\hat{\lambda}\alpha + (1-\hat{\lambda})b\| \leq \underset{\neq 0}{\hat{\lambda}}\,\underset{<1}{\|\alpha\|} + \underset{\neq 0}{(1-\hat{\lambda})}\,\underset{<1}{\|b\|} < \hat{\lambda} + (1-\hat{\lambda}) = 1$$

Άτοπο. ■

7.7

<u>Ερώτημα</u>: Πόσες βέλτιστες προσεγγίσεις μπορούμε να έχουμε?

<u>Πρόταση</u>: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $(F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα και $B \subset V$ κυρτό. Έστω $x \in V$ και $A = \{b \in B : \|x - b\| = dist(x, B)\}$ δηλ. το A είναι το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων του x από το B ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$. Τότε: $A = \emptyset$ ή ($A \neq \emptyset$ και κυρτό).

<u>Σχόλ</u>: Επομένως αν $A \neq \emptyset$ και έχει 2 διαφορετικά στοιχεία, τότε κάθε κυρτός συνδυασμός τους είναι στοιχείο του A, δηλ. υπάρχουν άπειρες βέλτιστες προσεγγίσεις.

Απόδειξη:

Αν $A=\phi$ οκ.

Αν $A\neq\phi$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

<u>Π1</u>: $A=\{v_0\}$ Το οποίο είναι κυρτό καθώς:
$\in B$
$\lambda v_0+(1-\lambda)v_0=v_0\in A\ \forall\lambda\in[0,1]$

<u>Π2</u>. Το A έχει δύο τουλάχιστον διαφορετικά στοιχεία $y_A, y_B\in B$.

Έτσι: $y_A\neq y_B$ και $\|x-y_A\|=dist(x,B)=\|x-y_B\|$.

Αυτό

που θέλουμε να δείξουμε είναι ότι: $\lambda y_A+(1-\lambda)y_B\in A$
για κάθε $\lambda\in(0,1)$ (για $\lambda=0,1$ είναι προφανές).

Έχουμε πρώτα ότι: $\lambda y_A+(1-\lambda)y_B\in B$ επειδή το B είναι κυρτό.

Άρα: $\boxed{\|x-(\lambda y_A+(1-\lambda)y_B)\|\geq dist(x,B)}$ (1)

Επιπλέον:

$$\|x-(\lambda y_A+(1-\lambda)y_B)\|=\|\lambda x+(1-\lambda)y-\lambda y_A-(1-\lambda)y_B\|$$

$$=\|\lambda(x-y_A)+(1-\lambda)(x-y_B)\|$$

$$\leq\lambda\underbrace{\|x-y_A\|}+(1-\lambda)\|x-y_B\|$$

$$\leq\lambda\cdot dist(x,B)+(1-\lambda)\,dist(x,B)$$

$$\leq dist(x,B)\qquad(2)$$

$(1)+(2)\Rightarrow\|x-(\lambda y_A+(1-\lambda)y_B)\|=dist(x,B)\Rightarrow\lambda y_A+(1-\lambda)y_B\in A$ ∎