Διάλεξη 8

Δευτέρα 2/11/2020

(9πμ – 11πμ)

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

Αναδρομή 1 (βλ. Διάλεξη 6).

Δείξαμε ότι:

Θεώρημα: $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathbb{X} = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα, $K \subset Y$, Y υπόχωρος του $(F, V, +, \cdot)$ με πεπερασμένη διάσταση και $x \in V$.

Αν K είναι κλειστό τότε υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από το K. □

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι η ακόλουθη:

Πόρισμα: $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathbb{X} = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα, Y υπόχωρος του $(F, V, +, \cdot)$ με πεπερασμένη διάσταση και $x \in V$. Υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από το Y.

Αποδ. Το Y είναι κλειστό υποσύνολο του V επειδή είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης. Το ζητούμενο προκύπτει με $K = Y$ στο Θεώρημα.

Σημ. Στη βιβλιογραφία συνήθως βρίσκει κανείς το Πόρισμα. 8.2.

Ερ. Είναι σημαντική η υπόθεση ότι ο υπόχωρος Y έχει πεπερασμένη διάσταση?

Απάντηση: ΝΑΙ

Παράδειγμα: $F=\mathbb{R}$, $X=(\mathbb{R}, C[0,\frac{1}{2}], +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$ όπου:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f(x)|.$$

$Y = \mathbb{P}[0,\frac{1}{2}]$ υπόχωρος με άπειρη διάσταση.

$$f\in C[0,\tfrac{1}{2}] \quad f(x)=\frac{1}{1-x} \quad \forall x\in[0,\tfrac{1}{2}].$$

$$f(x)=\sum_{\ell=0}^{\infty} x^\ell \quad dist(f,Y)=0 \quad , f\notin Y \text{ άρα}$$

δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση της f από Y

8.3

[το Παράδειγμα το $Y=\mathbb{P}[0,\frac{1}{2}]$ δεν είναι κλειστό! Άρα το Παράδειγμα απαντά στο Ερώτημα αν είναι απαραίτητη η υπόθεση ότι το Y έχει πεπερασμένη διάσταση μόνο στο Πόρισμα.

Το καλύτερο θα ήταν να έχουμε ένα παράδειγμα με K κλειστό $K\subset Y$ όπου Y υπόχωρος με άπειρη διάσταση.

Παράδειγμα: $F=\mathbb{R}$, $X=(F,\ell^\infty,+,\cdot,\|\cdot\|_\infty)$

$$\ell^\infty=\{(a_n)_{n=1}^\infty : a_n\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N},\ \sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|<+\infty\}$$

$$\|a\|_\infty=\sup_{i\in\mathbb{N}}|a_i|.$$

$$K=(a^m)_{m=1}^\infty, \quad a_i^m=\begin{cases}1, & 1\le i\le m\\ 0, & i\ge m+1\end{cases} \quad \forall i\in\mathbb{N}, \ \forall m\in\mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a^1=(1,0,\dots)\\ a^2=(1,1,0,\dots)\\ a^3=(1,1,1,0,\dots)\end{cases}$$

Προφανώς $\mathcal{K} \subset \ell^\infty$ διότι: $\sup_{i \in \mathbb{N}} |a_i^m| = 1 < +\infty \quad \forall m \in \mathbb{N}$. $\boxed{8.4}$

Έτσι: $\|a^m\|_\infty = 1$ και $\|a^m - a^n\|_\infty = |m-n| \quad \forall m,n \in \mathbb{N}$

≥ 1 όταν $m \neq n$.

Άρα το $\mathcal{K}$ είναι κλειστό ως διακριτό σύνολο. Τα $(a^m)_{m=1}^\infty$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $Y = \text{span}(a^m)_{m=1}^\infty$ δηλ. Y ο μικρότερος υπόχωρος που παράγεται από τα $(a^m)_{m=1}^\infty$. Φυσικά ο Y είναι απειροδιάστατος. Χρειαζόμαστε στοιχείο $b \in \ell^\infty$ το οποίο να μην έχει έλαχιστη προσέγγιση από το $\mathcal{K}$.

Ορίζουμε: $b_i = 1 + \frac{1}{i}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Τότε $(b - a^m)_i = \begin{cases} \frac{1}{i}, & 1 \leq i \leq m \\ 1 + \frac{1}{i}, & i \geq m+1 \end{cases}$, $\forall i \in \mathbb{N}$.

Έτσι $\|b - a^m\|_\infty = 1 + \frac{1}{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Επιπλέον: $\text{dist}(b, \mathcal{K}) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \|b - a^m\|_\infty = 1$

όμως $\|b - a^m\|_\infty > 1 \ \forall m \in \mathbb{N}$.

$\boxed{8.5}$

Επομένως δεν υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του b από το $\mathcal{K}$. $\blacksquare$

<u>Αναδρομή 2</u> (βλ. Διάλεξη 7)

<u>Ορισμός</u> (γνησίως κυρτή νόρμα) Η $\|\cdot\|$ είναι γνησίως κυρτή όταν:

$\forall x, y \in V$: $\|x\| = \|y\| = 1$, $x \neq y$ ισχύει: $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1)$. $\divideontimes$

<u>Θεώρημα</u>:

$\|\cdot\|$ γνησίως κυρτή ανν $\forall x, y \in V$ με: $x \neq y$, $\|x\| = \|y\| = 1$ ισχύει: $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1$. $\divideontimes$

Θεώρημα:

Αν B είναι το σύνολο των βέλτιστων προσεγγίσεων του x από ένα κυρτό σύνολο K, τότε: $B=\emptyset$ ή B κυρτό. ※

Το επόμενο θεώρημα εξασφαλίζει μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης όταν η νόρμα είναι αυστηρά κυρτή

Θεώρημα: Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X=(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα, $\|\cdot\|$ αυστηρά κυρτή και $K\subset V$ κυρτό. Αν για κάποιο $x\in V$ υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση $x^*\in K$ του x από το K, τότε η x^* είναι μοναδική.

Απόδειξη:

1. Όταν $x\in K$ τότε: $0\le dist(x,K)\le\|x-x\|=0$. Έτσι: $dist(x,K)=0$ και το x είναι μία βέλτιστη προσέγγιση του x από το K. Δεν υπάρχει άλλη βέλτιστη προσέγγιση $y\neq x$ διότι αν υπήρχε θα είχαμε: $\|x-y\|=dist(x,K)=0$, άρα $\|x-y\|=0\Rightarrow x=y$ άτοπο.

2. Έστω $x\notin K$. Θα κάνουμε απαγωγή σε άτοπο.

   Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_*,y_*\in K$ τ.ω. $x_*\neq y_*$ και $\|x-x_*\|=dist(x,K)=\|x-y_*\|$.

   Προφανώς $dist(x,K)>0$ διότι διαφορετικά $\|x-y_*\|=\|x-x_*\|=0\Rightarrow x_*=x=y_*\Rightarrow x_*=y_*$ άτοπο.

Επομένως μπορούμε να διαιρέσουμε με $dist(x,\mathcal{K})$ και **8.8**

παίρνουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\Bigg\| \underbrace{\frac{x-x_K}{dist(x,\mathcal{K})}}_{\overset{\shortparallel}{\alpha}} \Bigg\| = 1 \quad \text{και} \quad \Bigg\| \underbrace{\frac{x-y_K}{dist(x,\mathcal{K})}}_{\overset{\shortparallel}{b}} \Bigg\| = 1.$$

Έτσι $\|\alpha\|=1$, $\|b\|=1$ και $\alpha \neq b$ $(\alpha=b \Leftrightarrow x_K=y_K)$

Επειδή η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή επεται ότι:

$$\left\|\frac{\alpha+b}{2}\right\| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\, dist(x,\mathcal{K})} \|x-x_K+x-y_K\| < 1$$

$$\Leftrightarrow \|2x-x_K-y_K\| < 2\, dist(x,\mathcal{K}) \Leftrightarrow \Big\|x-\underbrace{\frac{x_K+y_K}{2}}_{\substack{\in\mathcal{K} \\ \text{επειδή } \mathcal{K} \text{ κυρτό}}}\Big\| < dist(x,\mathcal{K})$$

Άτοπο. ∎

8.9

Θα δείξουμε ότι η υπόθεση ότι η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή είναι απαραίτητη για να έχουμε μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης από κυρτό σύνολο.

<u>Θεώρημα:</u> $F=\mathbb{R}$, $\mathfrak{X}=(F,\mathcal{V},+,\cdot,\|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα η οποία δεν είναι αυστηρά κυρτή. Τότε υπάρχει υπόχωρος $\mathcal{Y}$ του $(F,\mathcal{V},+,\cdot)$ και $x\in\mathcal{V}$, τ.ω. το x να έχει δύο διαφορετικές βέλτιστες προσεγγίσεις από το $\mathcal{Y}$.

<u>Αποδ.</u> Επειδή η $\|\cdot\|$ δεν είναι αυστηρά κυρτή, υπάρχουν $\alpha, b \in \mathcal{V}$ τ.ω. $\alpha\neq b$, $\|\alpha\|=\|b\|=1$ και $\left\|\frac{\alpha+b}{2}\right\|=1$. $\left(\left\|\frac{\alpha+b}{2}\right\| \leq \frac{\|\alpha\|+\|b\|}{2} = 1 \ \forall \alpha,b\in\mathcal{V} \text{ με } \|\alpha\|=\|b\|=1. \right.$ Όταν η $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή τότε $\left\|\frac{\alpha+b}{2}\right\|<1$ $\forall \alpha,b\in\mathcal{V}$ με $\alpha\neq b$, $\|\alpha\|=\|b\|=1$. Όταν δεν είναι αυστηρά κυρτή τότε $\left\|\frac{\alpha+b}{2}\right\|=1$ για κάποια $\alpha,b\in\mathcal{V}$ με: $\left.\|\alpha\|=\|b\|=1\right)$

8.10

Έστω: $Y = \{\lambda(b-a) : \lambda \in \mathbb{R}\}$ το οποίο είναι προφανώς υπόχωρος του $(\mathbb{R}, v, +, \cdot)$ (μάλιστα διάστασης 1). Επίσης διαλέγουμε $x = -a$. Τότε: $\|x-0\| = \|-a\| = \|a\| = 1$ και

$$\|x-(b-a)\| = \|-a-b+a\| = \|b\| = 1.$$

Άρα η απόσταση του x από τα: $\underbrace{0}_{\lambda=0}, \underbrace{b-a}_{\lambda=1} \in Y$ είναι ίση με 1.

Επίσης: $0 \neq b-a$. και $\operatorname{dist}(x, Y) \leq \|x-0\| = 1$. Ο σκοπός μας είναι να εξασφαλίσουμε ότι τα $0, b-a$ είναι βέλτιστες προσεγγίσεις του x από Y. Γι' αυτό είναι αρκετό να εξασφαλίσουμε ότι: $\operatorname{dist}(x, Y) = 1$

Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

8.11 Υποθέτουμε ότι: $\operatorname{dist}(x, Y) < 1$. Άρα: υπάρχει $v_0 \in Y$ τ.ω $\|x - v_0\| < 1$ (Αν: $\|x-y\| \geq 1 \ \forall y \in Y \Rightarrow \inf\limits_{y \in Y} \|x-y\| \geq 1 \Rightarrow \operatorname{dist}(x, Y) \geq 1$).

Με βάση τον ορισμό του Y υπάρχει: $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $v_0 = \lambda_0 (b-a)$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε περιπτώσεις ως προς το λ_0.

<u>Περίπτωση 1</u>: $\underbrace{\lambda_0 > 1/2}$ $(\lambda_0 > 0)$

Έτσι: $b-a = \frac{1}{\lambda_0} v_0 \Rightarrow \frac{b-a}{2} = \frac{1}{2\lambda_0} v_0$. Επιπλέον:

$$\left\|x - \frac{b-a}{2}\right\| = \left\|x - \frac{1}{2\lambda_0} v_0\right\| = \left\|\frac{1}{2\lambda_0} x + \left(1 - \frac{2}{\lambda_0}\right) x - \frac{1}{2\lambda_0} v_0\right\|$$

$$= \left\|\frac{1}{2\lambda_0}(x - v_0) + \left(1 - \frac{2}{\lambda_0}\right) x\right\| \leq \underbrace{\frac{1}{2\lambda_0}}_{>0} \underbrace{\|x - v_0\|}_{<1} + \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2\lambda_0}\right)}_{>0} \underbrace{\|x\|}_{\|-a\| = 1}$$

$$< \frac{1}{2\lambda_0} + 1 - \frac{2}{\lambda_0} = 1. \qquad \left(\frac{1}{2\lambda_0} < 1\right)$$

Όμως:

$$\left\| x - \frac{b-a}{2} \right\| = \left\| -a - \frac{b-a}{2} \right\| = \left\| \frac{-2a-b+a}{2} \right\| = \left\| -\frac{b-a}{2} \right\|$$

$= \left\| \frac{a+b}{2} \right\| = 1$! Έτσι η Περίπτωση απορρίπτεται (δηλ. το λ_0 δεν μπορεί να είναι $> 1/2$).

Περίπτωση 2: $\lambda_0 < 1/2$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι: υπάρχει $\rho \in (0,1)$ τ.ω.

$\frac{b-a}{2} = \rho v_0 + (1-\rho)(b-a) \Leftrightarrow (b-a)\left(\frac{1}{2} - 1 + \rho\right) = \rho \cdot v_0$

$\Leftrightarrow v_0 = (b-a) \cdot \frac{(\rho - \frac{1}{2})}{\rho}$. Σε ην ουσία $\frac{\rho - \frac{1}{2}}{\rho} = \lambda_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \rho - \lambda_0 \rho = 1/2 \Leftrightarrow \rho(\underbrace{1-\lambda_0}_{\neq 0}) = 1/2 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2(1-\lambda_0)}$.

$\left(\rho = \frac{1}{2(1-\lambda_0)} > 0 \right.$ επειδή $1 - \lambda_0 > \frac{1}{2} - \lambda_0 > 0$,

$\left. \rho < 1 \Leftrightarrow 1 < 2(1-\lambda_0) \Leftrightarrow 2\lambda_0 < 2 \Leftrightarrow \lambda_0 < 1/2 \right)$

Άρα: $\frac{b-a}{2} = \rho \cdot v_0 + (1-\rho)\, b-a$. και:

$$\left\| x - \frac{b-a}{2} \right\| = \| \rho x + (1-\rho) x - \rho v_0 - (1-\rho)(b-a) \|$$

$$= \| \rho(x - v_0) + (1-\rho)(x - (b-a)) \|$$

$$\leq \underbrace{\rho}_{>0} \underbrace{\|x - v_0\|}_{<1} + \underbrace{(1-\rho)}_{>0} \underbrace{\|x-(b-a)\|}_{=1} < \rho + (1-\rho) = 1.$$

Απορρίπτεται διότι: $\left\| x - \frac{b-a}{2} \right\| = 1$.

Άρα: $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ και $v_0 = \frac{b-a}{2}$.

Έτσι: $\|x - v_0\| < 1 \iff \|x - \frac{b-a}{2}\| < 1$

$\iff 1 < 1$ Άτοπο

Άρα: $\mathrm{dist}(x, Y) = 1$ και έτσι το x έχει τα $0, b-a$ ως δύο διαφορετικές βέλτιστες προσεγγίσεις του x από το Y ∎