Διάλεξη 9

Τετάρτη 4/11/2020

(9πμ – 11πμ)

ΜΕΜ-255 Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

Αναδρομή

1. $\|\cdot\|$ αυστηρά κυρτή, $K \subset V$ κυρτό, $x \in V$ και $x^* \in K$ με $dist(x,K) = \|x - x^*\|$ δηλ. υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση του x από το K. Τότε η βέλτιστη προσέγγιση είναι μοναδική.
2. Όταν η $\|\cdot\|$ δεν είναι αυστηρά κυρτή, τότε μπορεί να χαθεί η μοναδικότητα της βέλτιστης προσέγγισης.

Πρόταση: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathcal{V} = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ γραμμικός χώρος με νόρμα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

α) Η νόρμα $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή

β) $\forall x, y \in V$ και είναι γραμ. ανεξάρτητα ισχύει:
$$\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$$

Απόδειξη: 9.2

$(i) \Rightarrow (ii)$: Υποθέτουμε ότι η $\|\cdot\|$ είναι γνησίως κυρτή.

Έστω: $x, y \in V$ γραμμ. ανεξάρτητα. Άρα: $x \neq 0, y \neq 0$.

Επειδή η νόρμα είναι γνησίως κυρτή και: $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$, $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$ και $\underbrace{\frac{x}{\|x\|} \neq \frac{y}{\|y\|}}_{\text{γραμμ. ανεξ.}}$, έπεται από τον ορισμό ότι:

$$\left\|\lambda \frac{x}{\|x\|} + (1-\lambda)\frac{y}{\|y\|}\right\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1).$$

Διαλέγουμε: $\lambda = \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|} \in (0,1)$. Τότε: έπεται:

$$1 > \left\| \frac{\cancel{\|x\|}}{\|x\|+\|y\|} \cdot \frac{1}{\cancel{\|x\|}} \cdot x + \left(1 - \frac{\|x\|}{\|x\|+\|y\|}\right)\frac{1}{\|y\|} \cdot y \right\| \qquad \frac{\cancel{\|y\|}}{\|x\|+\|y\|}$$

$$\Rightarrow 1 > \frac{1}{\|x\|+\|y\|} \|x+y\| \Rightarrow \|x+y\| < \|x\|+\|y\|.$$ Δηλ. το (ii) ισχύει.

$(ii) \Rightarrow (i)$: Έστω: $x, y \in V$ με: $x \neq y$ και $\|x\| = \|y\| = 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι: $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$. Αυτό θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε ότι: $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq 1$. 9.3

Επειδή $\|x\| = \|y\| = 1$, έπεται ότι $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1$. Άρα δεν μπορεί να ισχύει $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1$ και αναγκαστικά έχουμε: $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$.

Έτσι:

$$\left\|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right\| = 1 = \frac{1}{2}\|x\| + \frac{1}{2}\|y\| = \left\|\frac{x}{2}\right\| + \left\|\frac{y}{2}\right\|$$, δηλ. έχουμε ισότητα στην τριγ. ανισότητα. Από την υπόθεση (ii), αυτό σημαίνει ότι τα $x/2, y/2$ είναι γραμμ. εξαρτημένα. Άρα: υπάρχει $\tilde{\lambda} \in F$ τ.ω.

$$\frac{x}{2} = \tilde{\lambda}\frac{y}{2} \text{ ή } \frac{y}{2} = \tilde{\lambda}\frac{x}{2}.$$

Αρκεί να εξετάσουμε μία από τις δύο περιπτώσεις. π.χ. $x/2 = \tilde{\lambda} y/2$. Τότε: $\left\|\frac{x}{2}\right\| = |\tilde{\lambda}| \left\|\frac{y}{2}\right\| \Rightarrow |\tilde{\lambda}| = 1$.

Περ. 1: $F=\mathbb{R}$ και $\tilde{\lambda}\in\mathbb{R}$.

Έτσι: $|\tilde{\lambda}|=1 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}\in\{1,-1\}$.

Όταν $\tilde{\lambda}=1$, τότε: $x/2 = y/2 \Rightarrow x=y$ άτοπο (διότι: $x\neq y$).

Όταν $\tilde{\lambda}=-1$, τότε: $x/2=-y/2 \Rightarrow x=-y \Rightarrow \frac{x+y}{2}=0$

$\Rightarrow \|\frac{x+y}{2}\|=0$ άτοπο (διότι $\|\frac{x+y}{2}\|=1$)

Περ. 2 $F=\mathbb{C}$ $\tilde{\lambda}\in\mathbb{C}$

Έτσι: $|\tilde{\lambda}|=1 \Leftrightarrow \tilde{\lambda}=e^{i\theta}$ για κάποιο $\theta\in[0,2\pi)$.

Επειδή $\|\frac{x+y}{2}\|=1$, έπεται ότι: $\|\tilde{\lambda}y+y\|=2 \Leftrightarrow |\tilde{\lambda}+1|\cdot\|y\|=2 \Leftrightarrow |\tilde{\lambda}+1|=2$

$\Leftrightarrow |\cos\theta+i\sin\theta+1|=2 \Leftrightarrow 4=(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta \Leftrightarrow 4=1+\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\cos\theta$

$\Leftrightarrow \cos\theta=1 \Leftrightarrow \theta=0$. Άρα: $\tilde{\lambda}=1$. Έτσι: $x=y$ άτοπο.

$\blacksquare$

Παράδειγμα

$F=\mathbb{R}$ $\mathcal{X}=(\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$.

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Θα δείξουμε ότι η $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι αυστηρά κυρτή.

Αρκεί να βρούμε δύο συναρτήσεις $g_1, g_2 \in C([0,1];\mathbb{R})$

γραμμικά ανεξάρτητες και τ.ω. $\|g_1+g_2\|_\infty = \|g_1\|_\infty + \|g_2\|_\infty$.

$g_1(x)=x$, $g_2(x)=x^2$ $\forall x\in[0,1]$.

(γραμμ. ανεξ.: $\lambda_1 x+\lambda_2 x^2=0$ $\forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2 x=0$ $\forall x\in(0,1)$

$\Rightarrow \begin{matrix}\lambda_1+\lambda_2=0 & (x=1)\\ \lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2=0 & (x=\frac{1}{2})\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\lambda_2/2=0\\ \lambda_1=-\lambda_2\end{matrix} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$.)

9.6

$\|x\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} |x| = \max\limits_{0\le x\le 1} x = 1$

$\|x^2\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} x^2 = 1.$

$h(x) = x + x^2 \quad \forall x\in[0,1].$

$h'(x) = 1+2x > 0$, άρα η h είναι αύξουσα και ≥ 0.

Έτσι: $\|x+x^2\|_\infty = \|h\|_\infty = \max\limits_{0\le x\le 1} h(x) = h(1) = 2.$

$\|x+x^2\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|x^2\|_\infty.$ ∎

__Σημ.__ $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ δεν είναι αυστηρά κυρτή.
$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$, $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, $\int_0^1 x+x^2\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$\boxed{\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{1/p},\ p>1,\ \text{κυρτή.}}$

9.7

__Χώροι με εσωτερικό γινόμενο και βέλτιστες προσεγγίσεις__

__Ορισμός:__ $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $X = (F, V, +, \cdot)$ γραμμικός χώρος και $b: V\times V \to F$. Λέμε ότι η b είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον V όταν:

i) $b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z) \quad \forall x,y,z\in V$

ii) $b(x,y) = \overline{b(y,x)} \quad \forall x,y\in V$ (Σημ. όταν $F=\mathbb{R}$ τότε $b(x,y)=b(y,x)$)

iii) $b(\lambda x,z) = \lambda\, b(x,z) \quad \forall \lambda\in F, \forall x,z\in V$

iv) $\forall x\in V$ με $x\neq 0$ έχουμε: $b(x,x) > 0$.

Παρατηρήσεις

1. Όταν $x \in V$. Τότε: $b(x,x) = \overline{b(x,x)} \Rightarrow b(x,x) \in \mathbb{R}$.

2. $b(x, \lambda y) = ?$ όταν $\lambda \in F$, $x, y \in V$.

$$b(x,\lambda y) = \overline{b(\lambda y, x)} = \overline{\lambda\, b(y,x)} = \bar{\lambda}\, \overline{b(y,x)} = \bar{\lambda}\, b(x,y)$$

3. Ένα εσωτερικό γινόμενο συνήθως συμβολίζεται με (x,y) αντί $b(x,y)$.

4. $(F, V, +, \cdot, b)$ λέμε ότι είναι ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο.

5. Το εσωτερικό γινόμενο εισάγει τη "γεωμετρική" έννοια της καθετότητας: $x \perp y$ όταν $b(x,y) = 0$ (ΟΡΙΣΜΟΣ).
x κάθετο στο y

6. $\forall x \in V$: $b(0,x) = 0 = b(x,0)$

Έστω: $x \in V$. Τότε: $b(0,x) = b(x-x,x) = b(x,x) + b(-x,x)$
$= b(x,x) + (-1)\, b(x,x) = 0$.

(Άρα: $0 \perp V$)

7. Έτσι: $b(x,x) = \begin{cases} > 0 & x \neq 0 \\ = 0 & x = 0 \end{cases} \geq 0 \quad \forall x \in V$.

Άρα η $\sqrt{b(x,x)}$ είναι καλά ορισμένη.

Θα δείξουμε ότι: $\|x\| = \sqrt{b(x,x)}$ είναι μία νόρμα στο $(F, V, +, \cdot)$. Γι' αυτό θα χρειαστούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Θεώρημα: (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) | 9.10

Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, $\mathbb{X} = (F, V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε: $|(x,y)| \le \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$ $\forall x,y \in V$.
(Η ισότητα ισχύει αν x,y είναι γραμμ. εξαρτημένα)

Απόδ.

Π1. $x=0$ ή $y=0$

Τότε. $\sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} = 0 = \sqrt{\underbrace{(x,y)}_{=0}}$

Π2: $x,y \neq 0$.

Π2.1: $F=\mathbb{R}$.

$(x-\rho y, x-\rho y) \ge 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x,x)+(x,-\rho y)+(-\rho y,x)$
$+(-\rho y,-\rho y) \ge 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow (x,x)+(-\rho)(-\rho)(y,y)-\rho(x,y)-\rho(y,x) \ge 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}$ | 9.11

$\Leftrightarrow (x,x)+\rho^2(y,y)-2\rho(x,y) \ge 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow P(\rho) := \rho^2 (y,y) - 2\rho(x,y) + (x,x) \ge 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{R}$

$\Delta = 4|(x,y)|^2 - 4(y,y)(x,x)$.

Όταν $\Delta > 0$ το $P(\rho)$ αλλάζει πρόσημο διότι έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Επειδή $P(\rho) \ge 0$ $\forall \rho \in \mathbb{R}$, αναγκαστικά:

$\Delta \le 0 \Leftrightarrow |(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$

$\Leftrightarrow |(x,y)| \le \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

Πότε ισχύει η ισότητα: Η ισότητα ισχύει αν $\Delta = 0$ δηλ. εάν το πολυώνυμο έχει διπλή ρίζα ρ_0. Δηλ. $\rho_0^2(y,y) - 2\rho_0(x,y) + (x,x) = 0$
$\Leftrightarrow (x-\rho_0 y, x-\rho_0 y) = 0 \Leftrightarrow x = \rho_0 y$.

διότι όταν $x-\rho_0 y \neq 0$ τότε: $(x-\rho_0 y, x-\rho_0 y) > 0$. Επιπλέον $\rho_0 \neq 0$, 9.12
διότι όταν $\rho_0 = 0$ τότε έχουμε: $P(\rho_0)=0 \Rightarrow (x,x)=0 \Rightarrow x=0$, άτοπο
διότι $x \neq 0$. Επομένως η ισότητα ισχύει ανν x,y γραμμικώς εξαρτημένα.

<u>Π2.2</u>: $F = \mathbb{C}$

$$(x-\rho y, x-\rho y) \geq 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{C}$$

$$\Leftrightarrow (x,x) + |\rho|^2 (y,y) - \bar{\rho}(x,y) - \rho(y,x) \geq 0 \quad \forall \rho \in \mathbb{C}.$$

Διαλέγουμε: $\rho = \frac{(x,y)}{(y,y)}$, Τότε: $(x,x) + \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,y) - \frac{\overline{(x,y)}(x,y)}{(y,y)}$
$- \frac{(x,y)}{(y,y)}(y,x) \geq 0.$

9.13

$$\Leftrightarrow (x,x) + \cancel{\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}} - \cancel{\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}} - \frac{|(x,y)|^2}{(y,y)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x,x)(y,y) \geq |(x,y)|^2 \Leftrightarrow |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

Παρατηρούμε ότι:

$$|(x,y)| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} \Leftrightarrow \left(x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y, x - \frac{(x,y)}{(y,y)}y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{(x,y)}{(y,y)} y = 0.$$

$\Leftrightarrow x - \rho y = 0$ για κάποιο $\rho \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow x, y$ γραμμ. εξαρτημένα.