Εργ. 3Β | 0

Πάνω στην υλοποίηση

του Εργαστηρίου Υπολογιστών 3

ΜΕΜ-255 (Η). Προσέγγιση και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

<u>Αναδρομή</u> Έστω ο ακόλουθος γραμμικός χώρος με εσωτερικό | Εργ.3Β | 1

γινόμενο: $(\mathbb{R}, R[a,b], +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ όπου:

$$R[a,b] = \{g : [a,b] \to \mathbb{R} : g \text{ Riemann ολοκληρώσιμη στο } [a,b]\}$$

και $\quad (f,g) := \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \forall f,g \in R[a,b].$

Έστω: $J \in \mathbb{N}$ με $J \geq 5$, $h = \frac{b-a}{J}$, $x_j = a + jh$ για $j = 0, \dots, J$, και

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} g : [a,b] \to \mathbb{R} : \; g(x_j) = 0 \quad j = 0, \dots, J \quad \text{και } \exists\, (c_j)_{j=0}^{J-1} \subset \mathbb{R} \\ \qquad\qquad\qquad \text{τ.ω } \; g(t) = c_j \quad \forall t \in (x_j, x_{j+1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad j = 0, \dots, J-1. \end{array} \right\}.$$

Τότε: $\dim Y = J$ και Y υπόχωρος του $R[a,b]$. Μία βάση

$\mathcal{B} = \{y_k : k = 1, \dots, J\}$ του Y αποτελείται από τις συναρτήσεις:

$$y_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{όταν } t \in (x_{k-1}, x_k) \\ 0 & \text{όταν } t \notin (x_{k-1}, x_k) \end{cases} \quad \forall t \in [a,b],\; k = 1, \dots, J.$$

Επιπλέον έχουμε:

$$(\psi_k,\psi_\lambda) = \begin{cases} h & k=\lambda \\ 0 & k\neq\lambda \end{cases}, \quad 1\le k,\lambda\le J,$$

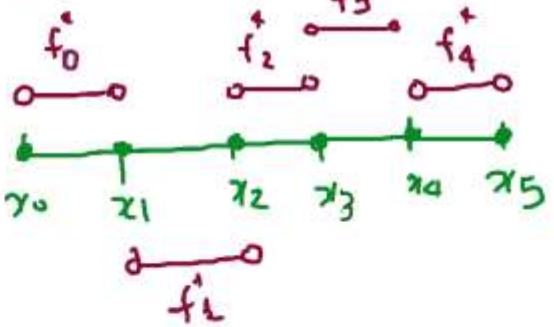
που σημαίνει ότι η βάση $\mathcal{B}$ είναι ορθογώνια.

Έστω $f\in R[a,b]$ και $f^*\in \Psi$ η βέλτιστη προσέγγιση της f από τον Ψ ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ που παράγεται από το $(\cdot,\cdot)$.

Τότε: $$f^*(t) = f_j := \frac{1}{h}\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(t)\,dt, \quad \forall t\in(x_j,x_{j+1}), \ j=0,\dots,J-1,$$

προσέγγιση του ολοκληρώματος με τον κανόνα του Simpson

Και: $f^*(x_j)=0$ για $j=0,\dots,J$.

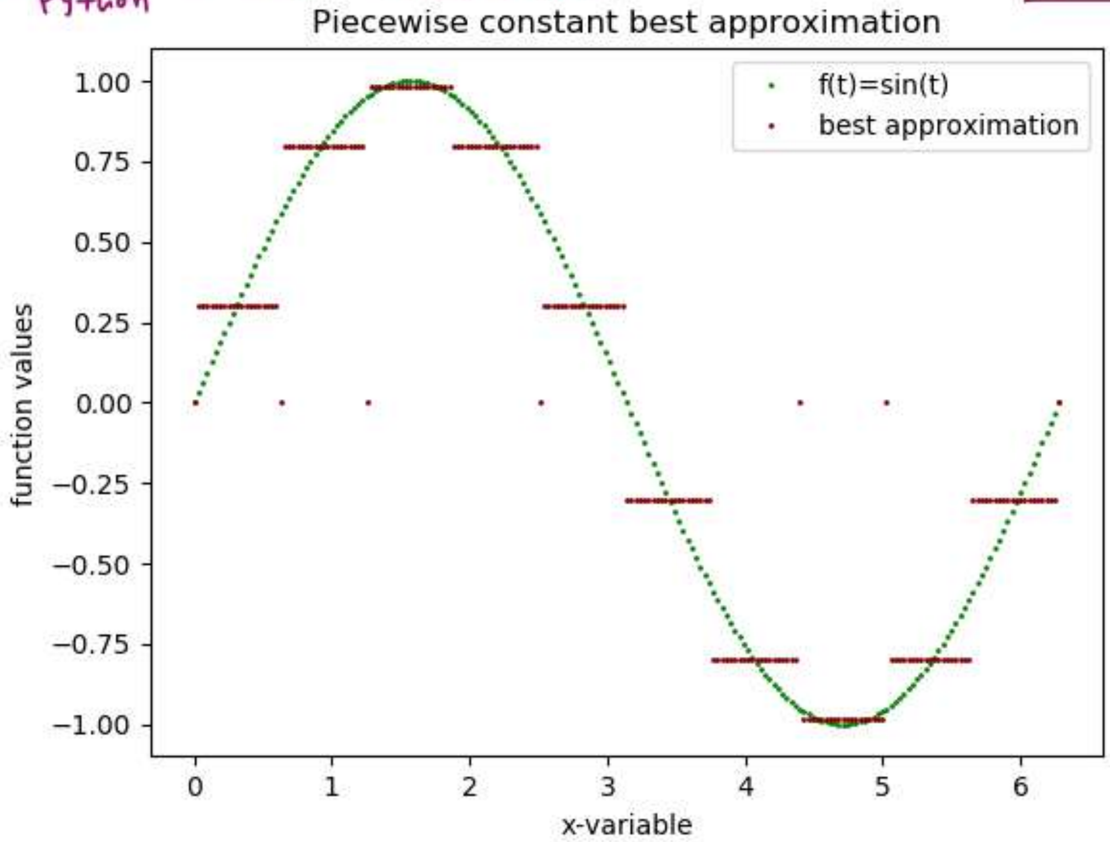


$J=5$

#

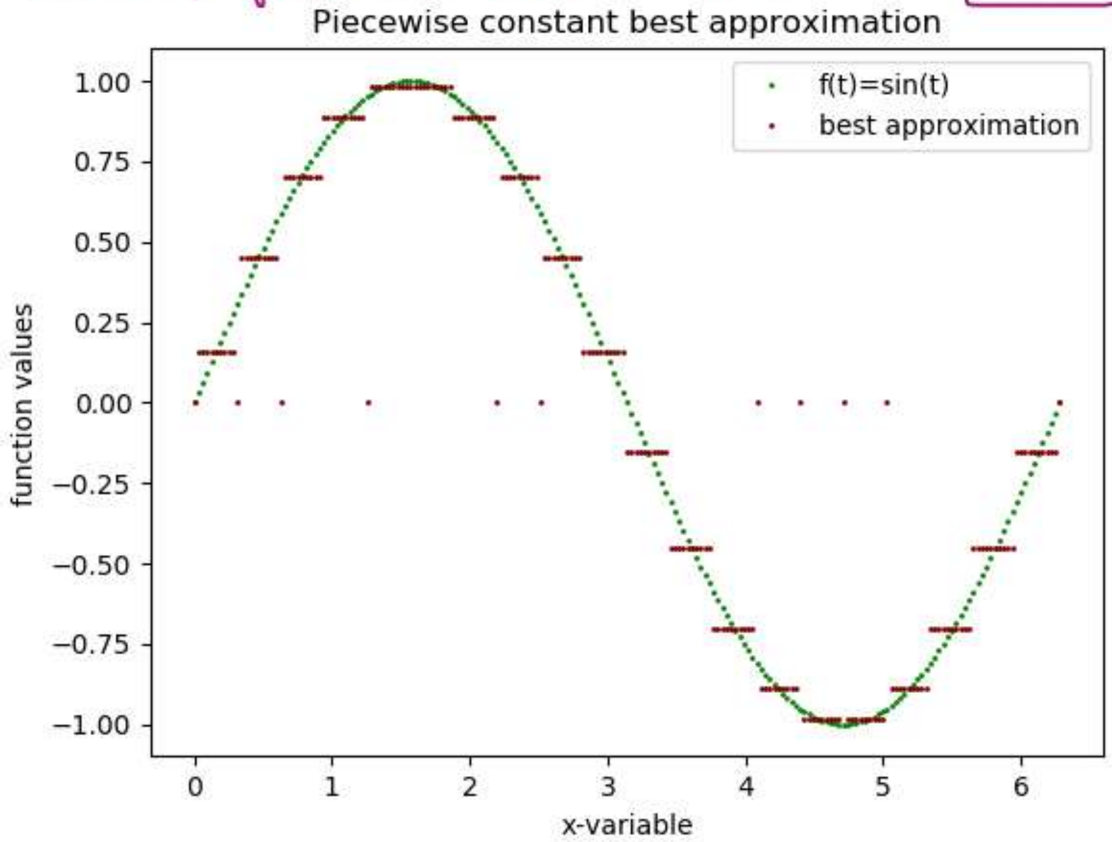
Υλοποίηση με python όπου: $J=10$, $N=200$.

Εργ3Β | 3



Υλοποίηση με Python όπου: J=20 N=900

ΕΡΓ3Β | 4



```
import numpy;import mpmath

import matplotlib.pyplot as ppp
#
def ff(t):
   val=mpmath.sin(t)
   return val
#
def fstar(J,xx,aa,t):
   val=0.0
   for i in range(J):
      if xx[i]<t and t <xx[i+1]:
         val=aa[i]
   return val
#
J=int(input('Specify J='))
#
a=0.0
b=2.0*numpy.pi
#
aa=numpy.zeros(J)
xx=numpy.zeros(J+1)
#
dx  = (b-a)/float(J)
dxx = dx/6.0
#
for i in range(J+1):
   xx[i]=a+float(i)*dx
#
for i in range(J):
   aa[i]=(dxx/dx)*(ff(xx[i])+4.0*ff(xx[i]+0.5*dx)+ff(xx[i+1]))
#
#
```

```
#Ploting
#
N=200
pxx=(b-a)/float(N)
#
xvec=numpy.zeros(N+1)
yvec=numpy.zeros(N+1)
zvec=numpy.zeros(N+1)
#
for i in range(N+1):
   xvec[i]=a+float(i)*pxx
   yvec[i]=ff(xvec[i])
   zvec[i]=fstar(J,xx,aa,xvec[i])
#
ppp.xlabel('x-variable')
ppp.ylabel('function values')
ppp.title('Piecewise constant best approximation')
ppp.plot(xvec,yvec,color='green',label='sin(t)',linestyle=' ',
marker=".",markersize=2)
ppp.plot(xvec,zvec,color='maroon',label='best approximation',
linestyle=' ',marker=".",markersize=2)

ppp.legend()
ppp.show()
```

Υπόχωρος με κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις

Έστω:

$$\underline{Y} = \left\{ g:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R} \;:\; g(x_j)=0 \text{ για } j=0,\dots,J, \text{ και υπάρχουν } (a_j)_{j=0}^{J-1}\subset\mathbb{R} \text{ και } (b_j)_{j=0}^{J-1}\subset\mathbb{R} \text{ τ.ω. } g(t)=a_j t+b_j \;\forall t\in(x_j,x_{j+1}),\ j=0,\dots,J-1 \right\}$$

Τότε:

$\underline{Y}$ υπόχωρος του $R[a,b]$ με $\dim \underline{Y} = 2J$.

Το σύνολο $\mathcal{B}_1 := \{ y_{2\ell}, y_{2\ell+1} : \ell=0,\dots,J-1 \} \subset \underline{Y}$ με:

$$y_{2\ell}(t) = \begin{cases} t & \text{όταν } t\in(x_\ell,x_{\ell+1}) \\ 0 & \text{όταν } t\notin(x_\ell,x_{\ell+1}) \end{cases}, \quad y_{2\ell+1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{όταν } t\in(x_\ell,x_{\ell+1}) \\ 0 & \text{όταν } t\notin(x_\ell,x_{\ell+1}) \end{cases}$$

για κάθε $t\in[a,b]$ και $\ell=0,\dots,J-1$, συνιστά μία βάση του $\underline{Y}$.

Η βάση $\mathcal{B}_1$ δεν είναι ορθογώνια διότι:

$$(y_{2\ell}, y_{2\ell+1}) = \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} t \, dt \neq 0 \quad \text{για } \ell=0,\dots,J-1,$$

ενώ: $\quad (y_{2\ell}, y_{2\ell'}) = 0 \;, \; (y_{2\ell}, y_{2\ell'+1}) = 0 \;, \; (y_{2\ell+1}, y_{2\ell'+1}) = 0$

όταν: $\ell \neq \ell'$ και $0 \leq \ell, \ell' \leq J-1$.

<u>ΙΔΕΑ</u>: Για να γίνει η $\mathcal{B}_1$ ορθογώνια αρκεί να ορίσουμε:

$$y_{2\ell}(t) = \begin{cases} P_\ell(t) & \text{όταν } t \in (x_\ell, x_{\ell+1}) \\ 0 & \text{όταν } t \notin (x_\ell, x_{\ell+1}) \end{cases} \quad \forall t \in [a,b], \; \ell=0,\dots,J-1,$$

όπου: $P_\ell \in \mathbb{P}^1[x_\ell, x_{\ell+1}]$ με: $\displaystyle\int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} P_\ell(t)\,dt = 0 \quad$, για $\ell=0,\dots,J-1$.

Έστω: $0 \leq \ell \leq J-1$ και $P_\ell(t) = \gamma_\ell (t - x_\ell) + \delta_\ell \;\; \forall t \in [x_\ell, x_{\ell+1}]$ για κάποια $\gamma_\ell, \delta_\ell \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$\int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} P_\ell(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \gamma_\ell \left.\frac{(t-x_\ell)^2}{2}\right|_{t=x_\ell}^{t=x_{\ell+1}} + \delta_\ell (x_{\ell+1} - x_\ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_\ell \frac{(x_{\ell+1}-x_\ell)^2}{2} + \delta_\ell (x_{\ell+1} - x_\ell) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \gamma_\ell \frac{h^2}{2} + \delta_\ell h = 0 \leftrightarrow \gamma_\ell \frac{h}{2} + \delta_\ell = 0$. Διαλέγοντας $\gamma_\ell = 1$ έχουμε: $\delta_\ell = -\frac{h}{2}$. Έτσι: $p_\ell(t) = (t - x_\ell) - \frac{h}{2} = t - \frac{x_\ell + x_{\ell+1}}{2}$.

Τελικά έχουμε:

$$y_{2\ell}(t) = \begin{cases} t - \frac{x_\ell + x_{\ell+1}}{2} & \text{όταν } t \in (x_\ell, x_{\ell+1}) \\ 0 & \text{όταν } t \notin (x_\ell, x_{\ell+1}) \end{cases}, \forall t \in [a,b], \quad \ell = 0, \dots, J-1.$$

Έτσι η βάση $\mathcal{B}_1 = \{ y_{2\ell}, y_{2\ell+1} : \ell = 0, \dots, J-1 \}$ είναι ορθογώνια και:

$$\|y_{2\ell+1}\|^2 = (y_{2\ell+1}, y_{2\ell+1}) = \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} 1 \, dt = h,$$

$$\|y_{2\ell}\|^2 = (y_{2\ell}, y_{2\ell}) = \int_{x_\ell}^{x_{\ell+1}} \left(t - \frac{x_\ell + x_{\ell+1}}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{3}\left[\left(x_{\ell+1} - \frac{x_\ell + x_{\ell+1}}{2}\right)^3 - \left(x_\ell - \frac{x_\ell + x_{\ell+1}}{2}\right)^3\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[(2x_{\ell+1} - x_\ell - x_{\ell+1})^3 - (2x_\ell - x_\ell - x_{\ell+1})^3\right] = \frac{1}{24}\left(h^3 - (-h)^3\right) = \frac{2h^3}{24} = \frac{h^3}{12}.$$

Αν $f^* \in Y$ η βέλτιστη προσέγγιση της $f \in R[a,b]$ από το Y, τότε:

$$f^* = \sum_{\ell=0}^{J-1} \left[\frac{(f, y_{2\ell})}{(y_{2\ell}, y_{2\ell})} y_{2\ell} + \frac{(f, y_{2\ell+1})}{(y_{2\ell+1}, y_{2\ell+1})} y_{2\ell+1} \right]$$

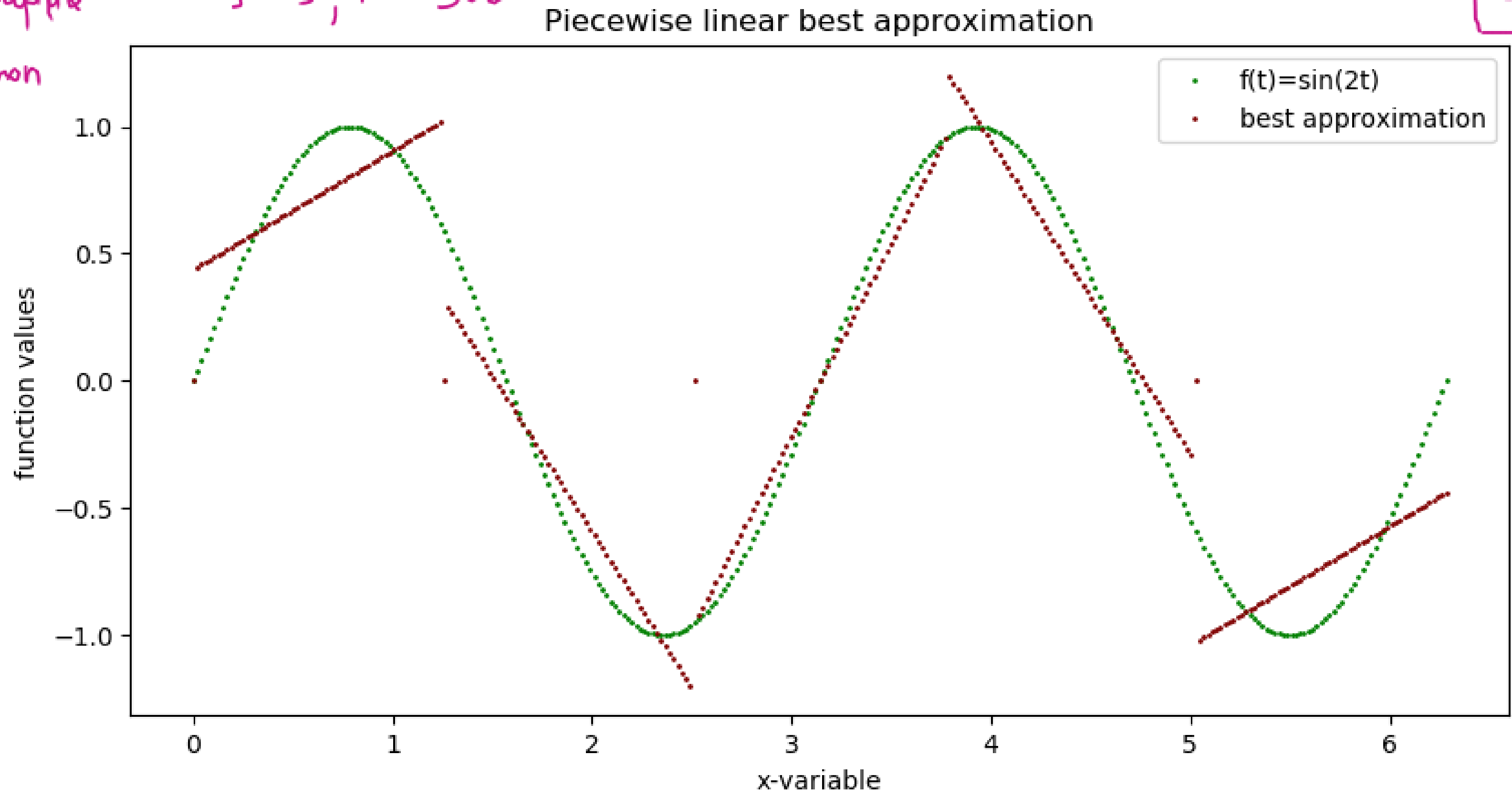
Άρα για $k = 0, \dots, J-1$ και $t \in (x_k, x_{k+1})$, έπεται ότι:

$$f^*(t) = \frac{1}{h} \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,dt}_{\simeq \text{Simpson}} + \frac{12}{h^3} \left[\underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) \left(t - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) dt}_{\simeq \text{Simpson}} \right] \left(t - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

Πρόγραμμα python

$J = 5, \; N = 300$

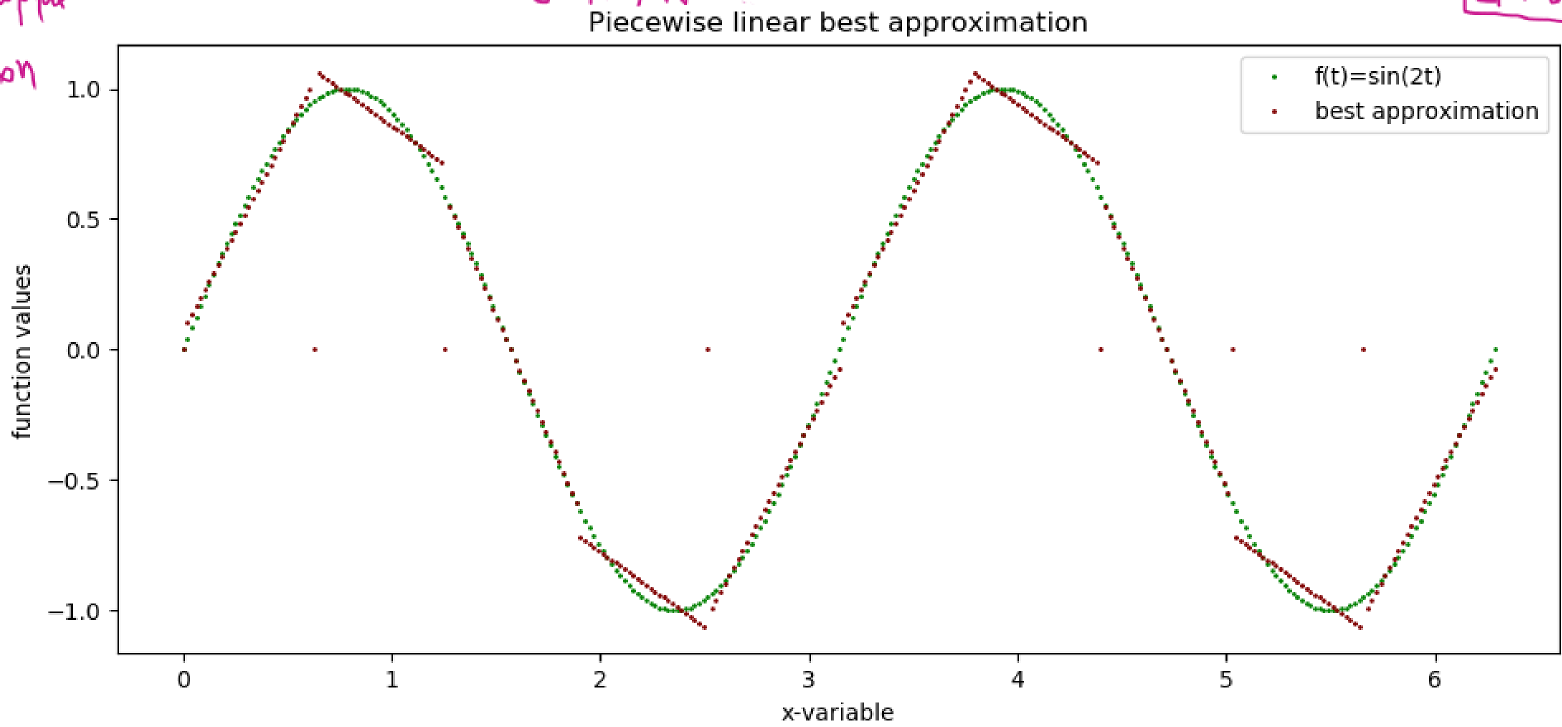
Εργ.3Β | 9



Πρόγραμμα python

$J=10$, $N=300$

Εργ3Β | 10



```python
import numpy
import mpmath
import matplotlib.pyplot as ppp
def ff(t):
   val=mpmath.sin(2.0*t)
   return val
def pol(xx,k,t):
   val = t-0.5*(xx[k]+xx[k+1])
   return val
def fstar(J,xx,aa,bb,t):
   val=0.0
   for i in range(J):
      if xx[i]<t and t <xx[i+1]:
         val=aa[i]+bb[i]*pol(xx,i,t)
   return val
J=int(input('Specify J='))
#
a=0.0
b=2.0*numpy.pi
#
aa=numpy.zeros(J);bb=numpy.zeros(J);xx=numpy.zeros(J+1)
#
dx  = (b-a)/float(J);dxx = dx/6.0
#
for i in range(J+1):
   xx[i]=a+float(i)*dx
#
for i in range(J):
   aa[i]=(dxx/dx)*(ff(xx[i])+4.0*ff(xx[i]+0.5*dx)+ff(xx[i+1]))
   bb[i]=ff(xx[i])*pol(xx,i,xx[i])+ff(xx[i+1])*pol(xx,i,xx[i+1])
   bb[i]=((12.0*dxx)/(dx*dx*dx))*bb[i]
```

```python
#Ploting
#
N=300
pxx=(b-a)/float(N)
#
xvec=numpy.zeros(N+1)
yvec=numpy.zeros(N+1)
zvec=numpy.zeros(N+1)
#
for i in range(N+1):
   xvec[i]=a+float(i)*pxx
   yvec[i]=ff(xvec[i])
   zvec[i]=fstar(J,xx,aa,bb,xvec[i])
#
ppp.xlabel('x-variable');ppp.ylabel('function values')
ppp.title('Piecewise linear best approximation')
ppp.plot(xvec,yvec,color='green',label='sin(t)',linestyle=' ',marker=".",markersize=2)
ppp.plot(xvec,zvec,color='maroon',label='best approximation',linestyle='
',marker=".",markersize=2)

ppp.legend();ppp.show()
```