Εργαστήριο Ασκήσεων 2

ΜΕΜ-255 Θ. Προσέγγισης και Εφαρμογές

ΧΕ 2020

UoC

Άσκηση 2.7

Έστω $p>1$, $m\in\mathbb{N}$ και $z\in\mathbb{C}^m$. Δ.Ο. $\|z\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|z\|_\infty$.

Λύση Έστω $z\in\mathbb{C}^m$ και $j_0\in\{1,\dots,m\}$ τ.ω. $|z_{j_0}|=\|z\|_\infty$. Τότε

Έχουμε τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\forall p>1: \quad \|z\|_p=\Big[\sum_{j=1}^{m}|z_j|^p\Big]^{1/p}\geq \left(|z_{j_0}|^p\right)^{1/p}=|z_{j_0}|=\|z\|_\infty$$

και

$$\forall p>1: \quad \|z\|_p=\Big(\sum_{j=1}^{m}|z_j|^p\Big)^{1/p}\leq \Big(\sum_{j=1}^{m}|z_{j_0}|^p\Big)^{1/p}=|z_{j_0}|\cdot m^{1/p}=m^{1/p}\|z\|_\infty .$$

Έτσι για κάθε $p>1$ έχουμε:

$$\|z\|_\infty\leq\|z\|_p\leq m^{1/p}\cdot\|z\|_\infty \Rightarrow 0\leq\|z\|_p-\|z\|_\infty\leq\left(m^{1/p}-1\right)\|z\|_\infty .$$

Επειδή $\lim\limits_{p\to+\infty}\|z\|_\infty\left(m^{1/p}-1\right)=0$, έπεται $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\|z\|_p-\|z\|_\infty\right)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{p\to+\infty}\|z\|_p=\|z\|_\infty . \qquad \square$$

Άσκηση 2.6

Έστω $\alpha \in (0,1)$, $f \in C([0,\alpha];\mathbb{R})$ με: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \; \forall x \in [0,\alpha]$. Επιπλέον, ορίζουμε: $S_m(x) = \sum_{n=0}^{m} x^n$ για κάθε $x \in [0,\alpha]$ και $m \in \mathbb{N}$. Δ.Ο.

$$\max_{x \in [0,\alpha]} |S_m(x) - f(x)| \leq \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

$\lim_{m \to +\infty} \alpha^{m+1} = 0$, επειδή $\alpha \in (0,1)$

Λύση: Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $x \in [0,\alpha]$. Τότε:

$$0 \leq f(x) - S_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{m} x^n = \sum_{n=m+1}^{\infty} x^n = x^{m+1} \sum_{n=m+1}^{\infty} x^{n-(m+1)}$$

$$= x^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^{m+1}}{1-x}.$$

Άρα: $\max_{[0,\alpha]} |f - S_m| \leq \frac{\alpha^{m+1}}{1-\alpha}$.

Σημ. Πρόκειται για μια εκτίμηση σφάλματος όταν προσεγγίζουμε τη σειρά $f(x)$ από ένα μερικό άθροισμα $S_m(x)$. $\square$

Άσκηση 2.5.

Θεωρούμε τις νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ ορισμένες στο γραμμικό χώρο $(\mathbb{C}^m, +, \cdot)$. Εξετάστε αν είναι αυστηρά κυρτές.

Λύση: Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $(\mathbb{C}^m, +, \cdot)$. Έχουμε αποδείξει ότι η $\|\cdot\|$ είναι αυστηρά κυρτή αν: $\|x+y\| < \|x\| + \|y\|$ για οποιαδήποτε γραμμικώς ανεξάρτητα $x, y \in \mathbb{C}^m$ ανν $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1$ για κάθε $x, y \in \mathbb{C}^m$ με: $x \neq y$ και $\|x\| = \|y\| = 1$.

A. Έστω $m \geq 2$. Τότε τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{C}^m$ με: $x_j = \begin{cases} 1 & j=1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases}$ για $j = 1, \dots, m$

και $y_j = \begin{cases} 1 & j = 1,2 \\ 0 & j \neq 1,2 \end{cases}$ για $j = 1, \dots, m$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και ικανοποιούν: α) $\|x\|_\infty = 1$, $\|y\|_\infty = 1$ και $\|x+y\|_\infty = 2 = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, και

β) $\|x\|_1 = 1$, $\|y\|_1 = 2$ και $\|x+y\|_1 = 3 = \|x\|_1 + \|y\|_1$.

Επομένως οι νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ δεν είναι αυστηρά κυρτές όταν $m \geq 2$.

B. $m=1$. Τότε οι νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_1$ ταυτίζονται με το μέτρο $|\cdot|$ μιγαδικού αριθμού. Επειδή η απεικόνιση $\gamma: \mathbb{C}_1 \times \mathbb{C}_1 \to \mathbb{C}$ με: $\gamma(z,w) = z\bar{w}$ για κάθε $z,w \in \mathbb{C}_1$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}_1$ και $|z| = \sqrt{\gamma(z,z)}$, συμπεραίνουμε ότι το μέτρο μιγαδικού αριθμού είναι αυστηρά κυρτή νόρμα στο $\mathbb{C}_1$.

<u>Σημ.1</u> Ένας άλλος τρόπος για να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα είναι με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού δεν είναι αυστηρά κυρτή νόρμα στο $\mathbb{C}_1$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $v,w \in \mathbb{C}_1$ γραμμικά ανεξάρτητα τω. $|v+w| = |v|+|w|$. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί επειδή $\dim(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_1, +, \cdot) = 1$, άρα δεν υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία στο $(\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_1, +, \cdot)$.

<u>Σημ.2</u>. Επίσης μπορούμε να αποδείξουμε ότι αν $v,w \in \mathbb{C}_1$ με: $|v|=|w|=1$ $\overset{v \neq w}{}$ τότε $\left|\frac{v+w}{2}\right| < 1$.
Πράγματι, έστω: $v,w \in \mathbb{C}_1$ με: $|v|=|w|=1$ και $v \neq w$. Τότε: $v = e^{i\phi}$ και $w = e^{i\theta}$ για κάποια $\phi, \theta \in [0, 2\pi)$ και $\phi \neq \theta$. Τότε: $|v+w|$
$= |e^{i\phi} + e^{i\theta}| = \underbrace{|e^{i\theta}|}_{1} |1 + e^{i(\phi-\theta)}| = \left[(1+\cos(\phi-\theta))^2 + \sin^2(\phi-\theta)\right]^{1/2} = \left[2 + 2\cos(\phi-\theta)\right]^{1/2}$.

Επομένως: $|v+w| \leq \sqrt{4} = 2$. Επιπλέον, $|v+w| = 2$
$\Leftrightarrow 2 + 2\cos(\phi-\theta) = 4 \Leftrightarrow \cos(\phi-\theta) = 1 \Leftrightarrow \phi - \theta = 0 \Leftrightarrow \phi = \theta$ άτοπο. Έτσι: $\frac{|v+w|}{2} < 1$.

<u>Σημ.3</u> Μήπως μία νόρμα που ορίζεται σε γραμμικό χώρο διάστασης 1 είναι πάντα αυστηρά κυρτή? Η απάντηση είναι: ΝΑΙ

Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $\mathcal{X} = (F, V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα διάστασης 1. Τότε: $V = \{\lambda \cdot v : \lambda \in F\}$ για κάποιο $v \in V$ με: $\|v\| = 1$.
Έστω: $z,w \in V$ με $z \neq w$ και $\|z\| = \|w\| = 1$. Τότε: $z = \lambda v$ και $w = \mu v$ για κάποια $\lambda, \mu \in F$ με: $\lambda \neq \mu$. Επιπλέον, $\|z\| = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ και $\|w\| = 1 \Rightarrow |\mu| = 1$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι: $\left\|\frac{z+w}{2}\right\| < 1$. Παρατηρούμε ότι: $\left\|\frac{z+w}{2}\right\|$ $= \|v\| \left|\frac{\lambda+\mu}{2}\right| = \left|\frac{\lambda+\mu}{2}\right|$. Επειδή $\lambda \neq \mu$ και $|\lambda| = |\mu| = 1$, έπεται $\left|\frac{\lambda+\mu}{2}\right| < 1$ (βλ. Σημ.2 πιο πάνω).

$\square$

'Ασκηση 2.4 :

'Εστω $m \in \mathbb{N}$ και $P^m := \{t^\ell : \ell = 0, \dots, m\}$. Δείξτε ότι τα στοιχεία του P^m είναι γραμμικώς ανεξάρτητα ως στοιχεία του γραμμικού χώρου $(\mathbb{R}, C([a,b];\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Λύση: 'Εστω $(\lambda_j)_{j=0}^m \subset \mathbb{R}$ τ.ω. $\sum_{j=0}^m \lambda_j t^j = 0 \quad \forall t \in [a,b]$. Επιπλέον, ορίζουμε: $p(t) = \sum_{j=0}^m \lambda_j t^j$, $\forall t \in [a,b]$. 'Ετσι το p είναι πολυώνυμο βαθμού το οποίο έχει πάνω από m ρίζες καθώς μηδενίζεται στο $[a,b]$. Άρα: $p \equiv 0$ ή ισοδύναμα: $\lambda_j = 0$ για $j = 0, \dots, m$.

Σημ. Μπορούμε να κάνουμε επαγωγή ως προς m. 'Ετσι το $P^0 = \{1\}$ έχει γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία επειδή $1 \neq 0$. 'Εστω ότι το P^m έχει γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία για κάποιο $m \in \mathbb{N}_0$.

Ας είναι $(\lambda_j)_{j=0}^{m+1} \subset \mathbb{R}$ τ.ω. $\sum_{j=0}^{m+1} \lambda_j t^j = 0 \quad \forall t \in [a,b]$

$\Rightarrow \lambda_{m+1} \cdot t^{m+1} + \sum_{j=0}^m \lambda_j t^j = 0 \quad \forall t \in [a,b]$. Παραγωγίζοντας ως προς t $m+1$ φορές έπεται $\lambda_{m+1} (m+1)! = 0$, επομένως $\lambda_{m+1} = 0$. 'Ετσι:
$\sum_{j=0}^m \lambda_j t^j = 0 \quad \forall t \in [a,b] \Rightarrow \lambda_j = 0$ για $j = 0, \dots, m$ επειδή το P^m έχει γραμ. ανεξάρτητα στοιχεία. $\square$

'Ασκηση 2.9 : 'Εστω: $X = (\mathbb{R}, C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot, \|\cdot\|_\infty)$,

$$B = \{g \in C([0,1];\mathbb{R}) : \exists \beta > 0 \text{ τ.ω. } g(t) = e^{\beta t} \ \forall t \in [0,1]\}$$

και $f \in C([0,1];\mathbb{R})$ με $f(t) = 1/2$ για κάθε $t \in [0,1]$.

α) Δ.ο. $dist(f, B) = 1/2$, β) Εξηγείστε γιατί δεν υπάρχει $g^* \in B$ τ.ω. $\|f - g^*\|_\infty = \inf_{g \in B} \|f - g\|_\infty$.

Εργ. Ασκ.	2.8

Λύση

α). Έστω: $g\in B$. Τότε $g(t)=e^{bt}$ $\forall t\in[0,1]$ για κάποιο $b>0$.

Έστω: $E:=g-f$, δηλ. $E(t)=e^{bt}-\frac{1}{2}$ $\forall t\in[0,1]$. Σκοπός μας είναι να βρούμε την $\|E\|_\infty$. Επειδή $E'(t)=be^{bt}>0$ $\forall t\in[0,1]$, η E είναι γνησίως αύξουσα και $E(t)\geq E(0)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$. Άρα: $\|E\|_\infty=\max_{[0,1]}|E|=\max_{t\in[0,1]}E(t)$

$=E(1)=e^{b}-\frac{1}{2}$. Επομένως, $dist(f,B)=\inf_{g\in B}\|f-g\|_\infty$

$=\inf_{g\in B}\|g-f\|_\infty=\inf_{b>0}(e^{b}-\frac{1}{2})=e^{0}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

b) Έστω ότι υπάρχει $g^*\in B$ τ.ω $\|f-g^*\|_\infty=\frac{1}{2}$. Τότε $g^*(t)=e^{b_* t}$ $\forall t\in[0,1]$ για κάποιο $b_*>0$, και $\|f-g^*\|_\infty=e^{b_*}-\frac{1}{2}$. Άρα: $\|f-g^*\|_\infty=\frac{1}{2}\Rightarrow e^{b_*}=1$ $\Rightarrow b_*=0$ Άτοπο $\square$

Εργ. Ασκ.	2.9

Άσκηση 2.1

Έστω $F=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, και $\mathcal{X}=(F,V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ ένας γραμμικός χώρος με νόρμα.

b) Έστω $(a_n)_{n=1}^\infty\subset V$ τ.ω. $\|a_n-a_m\|>1$ για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$ με $m\neq n$. Δ.Ο. η $(a_n)_{n=1}^\infty$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Δ.Ο. ότι το $(a_n)_{n=1}^\infty$ είναι κλειστό.

Λύση:

b) Έστω $(a_{k_n})_{n=1}^\infty$ μια συγκλίνουσα υπακολουθία της $(a_n)_{n=1}^\infty$ με όριο $\alpha\in V$.

Τότε υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω $\|\alpha_{k_n}-\alpha\|<\frac{1}{3}$ $\forall n\geq n_0$. Άρα:

$1<\|\alpha_{k_{n_0+1}}-\alpha_{k_{n_0+2}}\|\leq\|\alpha_{k_{n_0+1}}-\alpha\|+\|\alpha-\alpha_{k_{n_0+2}}\|<\frac{2}{3}$

Άτοπο.

Εργ. Ασκ. | 2.10

b_2) Έστω $A=(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ και $b \in V$.

Έστω ακόμα ότι $\lim\limits_{n\to+\infty} \|b_n - b\| = 0$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $b \in A$.

Επειδή $\|b_n - b\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\|b_n - b\| < 1/3$ $\forall n \geq n_0$.

Άρα: $\|b_n - b_m\| \leq \|b_n - b\| + \|b - b_m\| \leq 2/3$ $\forall n, m \geq n_0$

Όταν: $\underset{m,n \geq n_0}{b_n \neq b_m}$ τότε: $1 < \|b_n - b_m\| < 2/3$ Άτοπο. Άρα: $b_n = b_m$

για κάθε $n, m \geq n_0$ ή ισοδύναμα $b_n = b_{n_0}$ $\forall n \geq n_0$. Άρα: $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} b_{n_0}$

που (λόγω της μοναδικότητας του ορίου) $b = b_{n_0} \in A$

$\square$

Εργ. Ασκ. | 2.11

<u>Άσκηση 2.3</u>

Έστω $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Σας ζητάνε να υπολογίσετε μια προσέγγιση της S.

Τι θα κάνατε? Τι μπορείτε να πείτε για το σφάλμα προσέγγισης?

<u>Λύση</u>. Η S συγκλίνει από το κριτήριο Leibniz και οι όροι της σειράς έχουν εναλλασσόμενο πρόσημο. Ας "απλώσουμε" μερικούς όρους της σειράς:

$$\begin{array}{cccccccc} n=1 & n=2 & n=3 & n=4 & n=5 & n=6 & n=7 & n=8 \end{array}$$

$$\underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2\cdot 1}} \quad \underbrace{-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{-\frac{1}{4\cdot 3}} \quad \underbrace{-\frac{1}{5} + \frac{1}{6}}_{-\frac{1}{5\cdot 6}} \quad \underbrace{-\frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{-\frac{1}{8\cdot 7}} \quad \cdots\cdots$$

Άρα ένα μερικό άθροισμα της σειράς με άρτιο πλήθος όρων ($2m$) έχει αρνητική τιμή και όρους $-\frac{1}{2\ell(2\ell-1)}$ $\ell = 1, \dots, m$. Ας το δούμε αυστηρά

$$S_{2m} = \sum_{n=1}^{2m} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{\ell=1}^{m} \left[\frac{(-1)^{2\ell}}{2\ell} + \frac{(-1)^{2\ell-1}}{2\ell-1} \right] = \sum_{\ell=1}^{m} \left(\frac{1}{2\ell} - \frac{1}{2\ell-1} \right) = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{(-1)}{2\ell(2\ell-1)}.$$

Εργ. Ασκ. 2.12

Έτσι: $-S_{2m} = \sum_{\ell=1}^{m} \frac{1}{2\ell(2\ell-1)} = \sum_{\ell=1}^{m} f(\ell)$ όπου: $f:[1,+\infty) \to (0,+\infty)$ με $f(x) = \frac{1}{2x(2x-1)}$ για κάθε $x \geq 1$.

για $\alpha \geq 1$

Επιπλέον έχουμε: $\int_\alpha^b f(x)dx = \int_\alpha^b \frac{1}{2x(2x-1)} dx = \int_\alpha^b \left[\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x}\right] dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln(2x-1)\Big|_{x=\alpha}^{x=b} - \ln(2x)\Big|_{x=\alpha}^{x=b}\right] = \frac{1}{2}\Big\{\ln(2b-1) - \ln(2\alpha-1)$$

$$- \ln(2b) + \ln(2\alpha)\Big\} = \frac{1}{2}[\ln(2b-1) - \ln(2b)] - \frac{1}{2}[\ln(2\alpha-1) - \ln(2\alpha)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{2b-1}{2b}\right) - \ln\left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha}\right)\right] = \frac{1}{2}\left\{\ln\left(1-\frac{1}{2b}\right) - \ln\left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha}\right)\right\} \xrightarrow[b\to+\infty]{} -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\alpha-1}{2\alpha}\right)$$

$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\alpha}{2\alpha-1}\right)$ δηλ. $\int_\alpha^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\alpha}{2\alpha-1}\right)$.

Εργ. Ασκ. 2.13

Ας θέσουμε: $\hat{S} = -S$ και $\hat{S}_{2m} = -S_{2m}$. Τότε: $\hat{S}_{2m} \xrightarrow[m\to+\infty]{} \hat{S}$. Επιπλέον θέτουμε $E_{2m} = \hat{S} - \hat{S}_{2m} = \sum_{\ell=2m+1}^{\infty} f(\ell)$. Επειδή $f'(x) = -\frac{8x-2}{[2x(2x-1)]^2} < 0$

για κάθε $x \geq 1$, η f είναι γνησίως φθίνουσα και:

$$\int_n^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt \quad \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=2m+1}^{N} \int_\ell^{\ell+1} f(t)dt \leq \sum_{\ell=2m+1}^{N} f(\ell) \leq \sum_{\ell=2m+1}^{N} \int_{\ell-1}^{\ell} f(t)dt, \quad \forall m \geq 1, \ \forall N \geq 2m+1$$

$$\underset{N\to+\infty}{\Rightarrow} \int_{2m+1}^{\infty} f(t)dt \leq E_{2m} \leq \int_{2m}^{\infty} f(t)dt \quad \forall m \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4m+2}{4m+1}\right) \leq E_{2m} \leq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4m}{4m-1}\right).$$

Εργ. Ασκ. 2.14

Έτσι η ποσότητα

$$\rho_m := \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{4m+2}{4m+1}\right) + \ln\left(\frac{4m}{4m-1}\right)\right] + \hat{S}_{2m}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(4m+2)\,4m}{(4m+1)(4m-1)}\right) + \hat{S}_{2m}$$

είναι μια προσέγγιση του $\hat{S}$ με σφάλμα

$$\sigma_m = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{4m+2}{(4m+1)}\right) - \ln\left(\frac{4m}{4m-1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{(4m+2)(4m-1)}{(4m+1)\,4m}\right)$$

όπου:

$$\lim_{m\to+\infty}\sigma_m = \frac{1}{4}\lim_{m\to+\infty}\ln\left(\frac{(4+2/m)(4-1/m)}{(4+1/m)\,4}\right) = \frac{1}{4}\ln(1) = 0.$$

Εργ. Ασκ. 2.15

Άσκηση:

Έστω $X=(\mathbb{R},\mathbb{R}^3,+,\cdot,\|\cdot\|_\infty)$ και $B=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_3=0\}$.

Βρείτε τις βέλτιστες προσεγγίσεις του $\alpha=(1,2,3)^T$ από το B. Πώς εξηγείται το γεγονός ότι υπάρχουν πολλές βέλτιστες προσεγγίσεις?

Λύση: Το σύνολο B είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ με διάσταση 2. Άρα υπάρχει βέλτιστη προσέγγιση $\alpha^*\in B$ του α από το B.

για την οποία: $\|\alpha-\alpha^*\|_\infty = dist(\alpha,B) = \inf_{b\in B}\|\alpha-b\|_\infty$

$$= \inf_{b_1,b_2\in\mathbb{R}} \max\{|1-b_1|,|2-b_2|,|3-0|\} = \inf_{b_1,b_2\in\mathbb{R}} \underbrace{\max\{3,|1-b_1|,|2-b_2|\}}_{\varphi(b_1,b_2)}.$$

Προφανώς $\varphi(b_1,b_2) \geq 3$. και $\varphi(b_1,b_2)=3$ ανν $|1-b_1|\leq 3$ και $|2-b_2|\leq 3$

$\iff -3 \leq b_1-1 \leq 3$ και $-3 \leq b_2-2 \leq 3 \iff b_1 \in [-2,4]$ και $b_2 \in [-1,5]$.

Άρα $\min\limits_{b_1,b_2 \in \mathbb{R}} \varphi(b_1,b_2) = 3 = \varphi(b_1,b_2) \ \forall (b_1,b_2) \in D := [-2,4] \times [-1,5]$.

Έτσι: $\underbrace{\alpha^* = (b_1,b_2,0)^T}_{\in B} \ \forall (b_1,b_2) \in D$.

Ο λόγος για τον οποίο έχουμε άπειρες προσεγγίσεις είναι επειδή η $\|\cdot\|_\infty$ δεν είναι αυστηρά κυρτή και υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικές βέλτιστες προσεγγίσεις

$\square$

| Εργ. Ασκ. | 2.16 |

| Εργ. Ασκ | 2.17 |

Άσκηση! Έστω ο γραμμικός χώρος $\underbrace{X}_{\text{μενόρμα}} = (\mathbb{R}, C([1,2];\mathbb{R}),+,\cdot,\|\cdot\|_\infty)$.

Για $k=1,3$, έστω: $q_k \in \mathbb{P}^k[1,2]$ με: $q_k(t) = t^k \ \forall t \in [1,2]$.

Επιπλέον ορίζουμε: $B = \{\lambda \cdot q_1 : \lambda \leq 0\}$. Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση $q^* \in B$ του q_3 από το B.

<u>Λύση</u>: Ψάχνουμε: $\lambda^* \leq 0$ τ.ω $\|\lambda^* q_1 - q_3\|_\infty = \inf\limits_{\lambda \leq 0} \|\lambda q_1 - q_3\|_\infty$.

Για κάθε $\lambda \leq 0$ ορίζουμε: $g_\lambda(t) = t^3 - \lambda t$ για κάθε $t \in [1,2]$.

Άρα: η g_λ είναι μη αρνητική και αύξουσα στο $[1,2]$. Αυτόσημα είναι:

$\|g_\lambda\|_\infty = g_\lambda(2) = 8 - \lambda 2 = 2(4-\lambda)$. Έστω: $\rho : (-\infty,0] \to \mathbb{R}$ με: $\rho(\lambda) = 2(4-\lambda) \ \forall \lambda \leq 0$.

Τότε: $\rho'(\lambda) = -2 < 0 \ \forall \lambda \leq 0$, που σημαίνει ότι η ρ είναι φθίνουσα. Έτσι: $\min\limits_{\lambda \leq 0} \rho(\lambda) = \rho(0) = 8$. Άρα: $\lambda^* = 0$ και $q^* = 0$.

$\square$

Άσκηση:

Έστω ο γραμμικός χώρος $X=(\mathbb{R}, \mathbb{P}^1[0,1], +, \cdot)$. Ορίζουμε
$\nu: \mathbb{P}^1[0,1] \to \mathbb{R}$ με: $\nu(p) = |p(0)| + |p(1)|$ $\forall p \in \mathbb{P}^1[0,1]$.

α) Δείξτε ότι η ν είναι μία νόρμα στον X

β) Έστω: $g \in \mathbb{P}^1[0,1]$ με $g(t)=t$ $\forall t\in[0,1]$, και $Y = \mathbb{P}^0[0,1]$.
Βρείτε τη βέλτιστη προσέγγιση $g^* \in Y$ της g από τον Y ως προς την ν.

Λύση:

α) Οι ιδιότητες: i) $\nu(\lambda p) = |\lambda|\,\nu(p)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{P}^1[0,1]$

ii) $\nu(p+q) \le \nu(p) + \nu(q)$ $\forall p, q \in \mathbb{P}^1[0,1]$

iii) $\nu(0)=0$

είναι προφανείς. Έστω $p \in \mathbb{P}^1[0,1]$ τ.ω $\nu(p)=0$. Αυτό σημαίνει: $p(0)=p(1)=0$. Επομένως $p\equiv 0$ επειδή είναι πρώτου βαθμού με δύο ρίζες.

β) Έστω: $q \in Y$. Τότε: $q(t) = c$ $\forall t \in [0,1]$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Έτσι:
$$\inf_{q\in Y} \nu(g-q) = \inf_{c\in\mathbb{R}} \left(|g(0)-c| + |g(1)-c|\right)$$
$$= \inf_{c\in\mathbb{R}} \left(|c| + |1-c|\right).$$

Έστω: $\varphi(c) = |c| + |c-1|$ $\forall c\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, έχουμε.

$$\varphi(c) = \begin{cases} c+c-1 = 2c-1 & \text{όταν } c \ge 1 \\ c+1-c = 1 & \text{όταν } 0 \le c < 1 \\ -c-c+1 = -2c+1 & \text{όταν } c < 0 \end{cases} \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Έτσι $\min_{[1,+\infty)} \varphi = \varphi(1) = 1$, $\min_{[0,1]} \varphi = 1$, $\min_{(-\infty,0]} \varphi = \varphi(0) = 1$. Έτσι:
$\min_{\mathbb{R}} \varphi = 1$ και λαμβάνεται στο $[0,1]$. Επομένως: $g^* = c$ για οποιοδήποτε $c \in [0,1]$. $\square$

'Άσκηση: Έστω $X=(\mathbb{R},\mathbb{R}^{\infty},+,\cdot)$ ο χώρος των ακολουθιών πραγματικών αριθμών. Επιπλέον ορίζουμε: $V=\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<+\infty\}$.

α) Δ.Ο. ο V είναι υπόχωρος

β) Δ.Ο. η $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ με: $\|\alpha\|=|\alpha_1|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|$ $\forall \alpha\in V$ είναι μία νόρμα στον V. Είναι η $\|\cdot\|$ αυστηρά κυρτή?

γ) Έστω $A=\{(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\infty} : \exists n_0\in\mathbb{N}$ τ.ω. $\alpha_{n+1}=\alpha_n \ \forall n\geq n_0\}$. Δ.Ο. $dist(b,A)=0 \quad \forall b\in V$.

Λύση: α) Έστω $\alpha,b\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\gamma=\lambda\alpha+b$. Τότε:
$\sum_{n=1}^{N}|\gamma_{n+1}-\gamma_n|\leq|\lambda|\sum_{n=1}^{N}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|+\sum_{n=1}^{N}|b_{n+1}-b_n|$ $\forall N\in\mathbb{N}$. Άρα: $\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_{n+1}-\gamma_n|<+\infty$

και επομένως $\gamma\in V$

β) β₁) Όταν $\alpha=0$, προφανώς $\|\alpha\|=0$. Όταν $\|\alpha\|=0$ τότε: $|\alpha_1|+\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|=0$
για κάποιο $\alpha\in V$

$\Rightarrow \alpha_1=0$ και $0\leq\sum_{n=1}^{N}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|\leq\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|=0 \quad \forall N\in\mathbb{N}$.

Έτσι: $\alpha_{n+1}-\alpha_n=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ και $\alpha_1=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_n=\alpha_1 \ \forall n\in\mathbb{N}$, $\alpha_1=0$ $\Rightarrow$ $\alpha_n=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$.

β₂) Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$ και $\alpha\in V$. Τότε: $\|\lambda\alpha\|=\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda|\,|\alpha_{n+1}-\alpha_n|+|\lambda|\,|\alpha_1|=|\lambda|\,\|\alpha\|$.

β₃) Έστω $\alpha,b\in V$. Τότε: $|\alpha_1+b_1|+\sum_{n=1}^{N}|(\alpha+b)_{n+1}-(\alpha+b)_n|\leq\sum_{n=1}^{N}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|+|\alpha_1|+\sum_{n=1}^{N}|b_{n+1}-b_n|+|b_1|$

για κάθε $N\in\mathbb{N}$. Έτσι: $\|\alpha+b\|\leq\|\alpha\|+\|b\|$.

Έστω $z,w\in V$ με: $z_j=1 \ \forall j\in\mathbb{N}$ και $w_j=\begin{cases}0 & j=1\\ 1 & j\geq 2\end{cases}$ $\forall j\in\mathbb{N}$. Τότε:

$z+w=\begin{cases}1 & j=1\\ 2 & j\geq 2\end{cases}$ $\forall j\in\mathbb{N}$. Επομένως τα z,w είναι γραμμ. ανεξάρτητα και $\|z\|=1$, $\|w\|=1$, $\|w+z\|=2=\|z\|+\|w\|$. Έτσι η $\|\cdot\|$ δεν είναι αυστηρά κυρτή.

γ). Το A προφανώς είναι υπόχωρος του V.

Έστω $b \in V$. Ορίζουμε: $(z^N)_{N=2}^{\infty} \subset A$ ως εξής:

$$z_j^N = \begin{cases} b_j & \text{για } j = 1, \dots, N \\ b_{N+1} + \frac{1}{N^2} & \text{για } j \geq N+1 \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Έτσι έχουμε:

$$\|b - z^N\| = |b_1 - z_1^N| + \sum_{j=1}^{\infty} \left| (b_{j+1} - b_j) - (z_{j+1}^N - z_j^N) \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \left| \underbrace{(b_{j+1} - b_j) - (z_{j+1}^N - z_j^N)}_{=0} \right| + \sum_{j=N}^{\infty} \left| (b_{j+1} - b_j) - (z_{j+1}^N - z_j^N) \right|$$

$$= \left| (b_{N+1} - \cancel{b_N}) - (z_{N+1}^N - \cancel{z_N^N}) \right| + \sum_{j=N+1}^{\infty} \left| (b_{j+1} - b_j) - \underbrace{(z_{j+1}^N - z_j^N)}_{=0} \right|$$

$$= |b_{N+1} - z_{N+1}^N| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |b_{j+1} - b_j|$$

$$= \frac{1}{N^2} + \sum_{j=N+1}^{\infty} |b_{j+1} - b_j| \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$$

(Άρα το A δεν είναι κλειστό)

Έτσι: $0 \leq \operatorname{dist}(b, A) \leq \|b - z^N\|$ $\forall N \in \mathbb{N}$ και επομένως $\operatorname{dist}(b, A) = 0$. □