Ы1.0

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 1 (εξ' αποστάσεως)

Τρίτη 20/10/2020

ΜΕΜ-255 Ⓗ Προσέγγιση και Εφαρμογές
ΧΕ 2020
UoC

Ы1.1

Υπολογισμός τιμών πολυωνυμικών συναρτήσεων

Υπόθεση: $m \in \mathbb{N}_0$ $\quad p(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$

$$= \sum_{j=0}^{m} a_j x^{m-j}$$

Δεδομένα: m και $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$

Πρόβλημα: Δίνεται $x \in \mathbb{R}$ και θέλουμε να βρούμε την τιμή $p(x)$ στα πλαίσια των τιμών που μπορεί να δώσει ένας υπολογιστής, δεδομένου ότι σε ένα Η/Υ υπάρχουν σφάλματα παράστασης και όρια στο μέγεθος των αριθμών. Επίσης μας ενδιαφέρει το υπολογιστικό κόστος (complexity) δηλ. πόσες πράξεις χρειάζονται για τον υπολογισμό του $p(x)$.

Lb1.2

Επιλογή 1 (Πρακτικά μη εφαρμόσιμη!)

Αν ξέρουμε τις ρίζες $(\rho_j)_{j=1}^{m} \subset \mathbb{C}$ του p τότε το p γράφεται στη μορφή:

$$p(x) = a_0 (x-\rho_1)\cdots(x-\rho_m) = a_0 \prod_{j=1}^{m} (x-\rho_j)$$

Τότε ο υπολογισμός του p(x) θα απαιτούσε $\boxed{m \begin{Bmatrix} \text{αφαιρέσεις} \\ \text{προσθέσεις} \end{Bmatrix}}$ και $\boxed{m \text{ πολ/σμούς}}$. Το πρακτικό πρόβλημα είναι ότι τα $(\rho_j)_{j=1}^{m}$ δεν είναι διαθέσιμα και ούτε είναι απλό να τα βρούμε ή τα υπολογίσουμε ή να τα προσεγγίσουμε με κάποιο αλγόριθμο.

LA.3

Επιλογή 2: Να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \cdot x^{m-j}$$

Το ερώτημα είναι πόσες πράξεις απαιτούνται? Η απάντηση είναι συναρτάται με ποιό τρόπο θα κάνεις τις πράξεις. π.χ. x, x^2, x^3, x^4

x ο πρώτος, $\overbrace{x\cdot x}^{x^2}$ 1 πολ/σμός

$x^3 = x\cdot x\cdot x$ 2 πολ/σμοί, $x^4 = x\cdot x\cdot x\cdot x$ 3 πολ/σμοί κ.ο.κ.

m-βαθμού $\sum_{l=2}^{m} (l-1) = \sum_{l=1}^{m-1} l = \frac{(m-1)m}{2} = O(m^2)$ πολ/σμοί

Επιπλέον m πολ/σμοί με τους συντελεστές και m προσθέσεις. Το κόστος είναι μη αποδεκτό καθώς υπολογισμός του x^3 όταν ξέρεις το x^2 απαιτεί 1 πολ/σμό: $x^3 = x \cdot x^2$.

6.1.4

Ιδέα: $p(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j x^{m-j} + \alpha_m$

αν το m μεγάλο και το x μικρό ή μεγάλο το x^{m-j} → big too
↳ too small

$$= \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \gamma_{m-j} + \alpha_m \quad (1)$$

$$\gamma_1 = x, \quad \gamma_{k+1} = x \cdot \gamma_k, \quad k = 1, \dots, m-1 \quad (2)$$

$\gamma_0 = 1$
$\gamma_1 = x$
$\gamma_2 = x^2$
$\vdots$
$\gamma_m = x^m$

Οι πράξεις που απαιτούνται είναι

$\boxed{(2)} \Rightarrow (m-1)$ πολ/σμοί

$\boxed{(1)} \Rightarrow (m-1)$ πολ/σμοί

$\boxed{(1)} \Rightarrow m-1$ προσθέσεις

$2m-2$ πολ/σμοί, $m-1$ προσθέσεις

6.1.5

Σε ένα ΗΥ ένας πολ/σμός είναι πιο αργός από μία πρόσθεση 15 με 20 φορές. Γι' αυτό οι πολ/σμοί είναι το κύριο κόστος. Όμως οι πολλαπλασιασμοί είναι πιο ευσταθείς σε πεπ. αριθμητική από την αφαίρεση. Γι' αυτό κανείς αναζητά τη χρυσή τομή σε ένα αλγόριθμο ανάμεσα στους πολ/σμούς και τις προσθέσεις/αφαιρέσεις.

Επιλογή 3: Σχήμα Horner (1819)

Lb1.6

$m=3$

$$p(x) = a_3 + a_2 x + a_1 x^2 + a_0 x^3$$

$$= a_3 + x\,(a_2 + a_1 x + a_0 x^2)$$

$$= a_3 + x\,[\underbrace{a_2 + x\,(\underbrace{a_1 + x\,\underbrace{a_0}})}]$$

3 πολλαπλασιασμοί

3 προσθέσεις

Ίσα σχεδόν όσες πράξεις θα χρειαζόμασταν αν ξέραμε τις ρίζες.

Lb1.7

Ας δούμε τον αλγόριθμο στη γενική του μορφή:

$$p_0(x) = a_0$$

$$p_1(x) = a_1 + x \cdot p_0(x)$$

$$p_2(x) = a_2 + x\, p_1(x)$$

$$\vdots$$

Η αναδρομική σχέση:

Σχήμα Horner.
$$\left[\begin{array}{l} p_0(x) = a_0 \\ p_{k+1}(x) = a_{k+1} + x \cdot p_k(x), \quad \underbrace{k=0,\dots,m-1}_{m} \end{array}\right.$$

m-πολλαπλασιασμοί, m-προσθέσεις

Με μαθ. επαγωγή: $p_k(x) = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell x^{k-\ell} \in \mathbb{P}^k, \quad k=0,\dots,m$

Lb1.8

As υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή $p'(x)$. Σήμερα "αριθμητική διαφόριση"

$$p'(x) \simeq \frac{p(x+\varepsilon)-p(x)}{\varepsilon}$$ για κατάλληλο ε.

↳ 2 υπολογισμούς τιμών του p άρα $2m$ πολ/σμούς
$2m$ προσθέσεις
1 διαίρεση
1 αφαίρεση
$\simeq 2m+1$ πολ/διαιρ
$2m+1$ προσθ/αφ.

Μπορούμε να κάνουμε τον υπολογισμό βασιζόμενοι στον τύπο του σχ. Horner, Παραγωγίζουμε ως προς x τον τύπο του σχήματος.

Lb1.9

$$P_0(x) = a_0,$$

$$P_{k+1} = a_{k+1} + x\,P_k(x) \quad k=0,\dots,m-1$$

$$P_0'(x) = 0$$
$$P_{k+1}'(x) = P_k(x) + x\,P_k'(x), \quad k=0,\dots,m-1$$

Ισοδύναμα: $P_1'(x) = P_0(x) = a_0$

$$P_{k+1}'(x) = P_k(x) + x\,P_k'(x), \quad k=1,\dots,m-1$$

Από Horner $(m-1)$ πολ/σμούς και $(m-1)$ προσθ για τα $P_{m-1}(x)$
και επιπλέον: $(m-1)$ πολ/σμοί, $m-1$ προσθ. Συν.: $2m-2$ πολ.
$2m-2$ προσθ.

Γιατί να μην κάνω Horner στον τύπο: $\boxed{Lb1.10}$

$$p'(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \underbrace{\alpha_i (m-j)}_{\in \mathbb{P}^{m-1}} x^{m-j-1}$$

→ μπορεί να γίνει μεγάλο όταν m είναι μεγάλο.

Horner { m-1 πολ/σμοί, m-1 προσθ. }

συντελεστές { m πολ/σμούς, m-1 διαιρέσεις }

$\simeq$ O(2m) πολ/μ, O(2m) προσθ.

Δηλ. το κόστος είναι συγκρίσιμο με εκείνο του αναδρομικού τύπου.

#