LABIb | 0

ΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ 1

(βίντεο)

ΜΕΜ-255 ΘΕΩΡΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΧΕ 2020

UoC

A. Υπολογισμός της τιμής ενός πολυωνύμου

Έστω $m \in \mathbb{N}_0$ ο βαθμός ενός πολυωνύμου και $(a_j)_{j=0}^{m}$ οι συντελεστές του ως προς $(t^{m-j})_{j=0}^{m}$ δηλ. $p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j t^{m-j} = a_0 t^m + \dots + a_m$. Το σχήμα Horner έχει τη μορφή:

$$P_0(x) = a_0$$

$$P_k(x) = P_{k-1}(x) \cdot x + a_k \quad , \; k = 1, \dots, m$$

όπου: $P_\ell(x) := \sum_{j=0}^{\ell} a_j t^{\ell - j}$ για: $\ell = 0, \dots, m$.

Υλοποίηση: input: $m, (a_j)_{j=0}^{m}, x$ output: v ← η τιμή $p(x)$

$$v = a_0$$

ανακύκλωση (loop)
$$\begin{cases} k = 1, \dots, m \\ v = a_k + x \cdot v \end{cases}$$

B. Υπολογισμός πρώτης παραγώγου ενός πολυωνύμου.

Ήδη έχουμε: $P_0(x) = a_0$

$P_k(x) = a_k + x \cdot P_{k-1}(x), k=1,\dots,m$

ή

$P_{-1}(x) = 0$

$P_k(x) = a_k + x P_{k-1}(x), k=0,\dots,m$

όπου: $P_{-1} \equiv 0$

Παραγωγίζοντας έπεται ότι:

$P_0'(x) = 0$

$P_k'(x) = P_{k-1}(x) + x P_{k-1}'(x)$ για $k=1,\dots,m$.

Υλοποίηση: input: $m, (a_j)_{j=0}^{m}, x$ output: d → τιμή $p'(x)$

$d=0; v=0$

ανακύκλωση (loop)

$k=1,\dots,m$

$v = a_{k-1} + x \cdot v$ → $P_{k-1}(x) = P_{k-2}(x) \cdot x + a_{k-1}$

$d = v + x \cdot d$ → $P_k'(x)$

Γ. Υπολογισμός δεύτερης παραγώγου ενός πολυωνύμου.

Παραγωγίζοντας μία ακόμα φορά έπεται:

$$p_0''(x) = 0$$

$$p_k''(x) = 2\, p_{k-1}'(x) + x\, p_{k-1}''(x)\ ,\ k=1,\dots,m$$

Όταν $m=0$ τότε: $p''(x)=p_0''(x)=0$. Όταν: $m=1$ τότε: $p''(x)=p_1''(x) = 2\,p_0'(x)+x\cdot p_0''(x)=0$. Άρα μη μηδενική τιμή αναμένεται όταν $m\geq 2$, επομένως αρκεί η ανακύκλωση ως προς k να ξεκινά από 2 με τελική τιμή m, ώστε να εκτελείται όταν $m\geq 2$. Αναγκαστικά εμπλέκεται ο προσδιορισμός της τιμής $p_{k-1}'(x)=x\, p_{k-2}'(x)+p_{k-2}(x)$, $p_{k-2}(x)=x\, p_{k-3}(x)+a_{k-2}$.

Υλοποίηση: input: $m, (a_j)_{j=0}^{m}, x$ output: $s \to p_2''(x)$

$s=0;\ d=0;\ v=0$
$k=2,\dots,m$
  $v = x\cdot v + a_{k-2}$
  $d = x\cdot d + v$
  $s = x\cdot s + 2d$

$$p_2''(x) = 2\,p_1'(x) + x\,\overset{\to 0}{p_1''(x)}$$

$$p_1'(x) = x\cdot \overset{\to 0}{p_0'(x)} + p_0(x)$$

$$p_0(x) = a_0 = x\, p_{-1}(x) + a_0$$

Δ. Υπολογισμός του ολοκληρώματος ενός πολυωνύμου

$$\int_a^b p(t)\,dt = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell \int_a^b t^{m-\ell}\,dt = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell \left(\frac{b^{m-\ell+1}}{m-\ell+1} - \frac{a^{m-\ell+1}}{m-\ell+1} \right)$$

$$= Q(b) - Q(a) \quad \text{με: } Q(t) = \sum_{\ell=0}^{m} a_\ell \frac{t^{m-\ell+1}}{m-\ell+1} = t\,\tilde{q}(t)$$

$$\text{με: } \tilde{q}(t) = \sum_{\ell=0}^{m} \frac{a_\ell}{m-\ell+1} \cdot t^{m-\ell}.$$

Έτσι: $\int_a^b p(t)\,dt = b\,\tilde{q}(b) - a\,\tilde{q}(a)$ και το σχήμα Horner οδηγεί

αλγόριθμο: $v = a_0/m+1$ input: $m, (a_j)_{j=0}^{m}, x$

$$\left[\begin{array}{l} k = 1, \dots, m \\ v = x \cdot v + \dfrac{a_k}{m-k+1} \end{array}\right.$$

output: $v \hookrightarrow \tilde{q}(x)$.

```python
import numpy
#
def pval(m,aa,t):
   zv = aa[0]
   for k in range(1,m+1):
      zv=t*zv+aa[k]
   return zv
#
def dval(m,aa,t):
   dv = 0.0;vv=0.0
   for k in range(1,m+1):
      vv  = t*vv+aa[k-1]
      dv  = vv+t*dv
   return dv
#
def sval(m,aa,t):
   dv = 0.0
   vv = 0.0
   sv = 0.0
   for k in range(2,m+1):
      vv  = t*vv+aa[k-2]
      dv  = t*dv+vv
      sv  = t*sv+2.0*dv
   return sv
#
def horner2(m,aa,t):
   vv=aa[0]/float(m+1)
   for k in range(1,m+1):
      vv=vv*t+(aa[k]/float(m-k+1))
   return vv
#
def quadr(m,aa,a,b):
   vv=b*horner2(m,aa,b)-a*horner2(m,aa,a)
   return vv
#
MM=5
aa=numpy.zeros(MM+1)
#
aa[0]=5.0;aa[1]=-4.0;aa[2]=3.0;aa[3]=-2.0
aa[4]=0.5;aa[5]=-1.0
#
xx=float(input('Value at x='))
print('d0_p(',xx,')=',pval(MM,aa,xx))
print('d1_p(',xx,')=',dval(MM,aa,xx))
print('d2_p(',xx,')=',sval(MM,aa,xx))
#
MM=3
aaa=numpy.zeros(MM+1)
#
#p(x)=x^3-x^2
#
aaa[0]=1.0;aaa[1]=-1.0;aaa[2]=0.0;aaa[3]=0.0
print('Q=',quadr(MM,aaa,0.0,1.0))
#
#
```