Lb 2.0

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ 2 (εξ' αποστάσεως)

Πέμπτη 29/10/2020

ΜΕΜ-255 Ⓗ Προσέγγιση και Εφαρμογές
ΧΕ 2020
UoC

Lb 2.1

Προσέγγιση Σειρών

<u>Πρόβλημα</u>: Έχουμε μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n=n_0}^{\infty}$ μη αρνητικών αριθμών για την οποία η σειρά $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε μία προσέγγιση του αριθμού:

$$S = \sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha_n \quad ?$$

<u>Σημ.</u> Όταν οι όροι της ακολουθίας $(\alpha_n)_{n=n_0}^{\infty}$ αλλάζουν πρόσημο τότε είναι πιο περίπλοκο να προσεγγιστεί το S διότι μπορεί να έχουμε μεγάλες προσθαφαιρέσεις και το S είναι απλά ένα όριο

<u>Πρώτη σκέψη</u>: Έστω $S_N = \sum_{n=n_0}^{N} \alpha_n$, $\forall N \geq N_0$. Επειδή $\alpha_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$, η $(S_N)_{N=n_0}^{\infty}$ είναι αύξουσα και $S_N \leq S$, $\forall N \geq n_0$ (άνω φραγμένη), δηλ. $S = \sup_{N \geq N_0} S_N$. Ένας απλός τρόπος για να προσεγγίσουμε το S είναι να υπολογίσουμε το S_N για ένα αρκετά μεγάλο N.

π.χ.
$$S_{n_0} = \alpha_{n_0}$$
$$S_{n+1} = S_n + \alpha_{n+1}, \quad \forall n \geq n_0$$

δηλ. στον ΗΥ έχουμε το ακόλουθο loop:

$$\begin{cases} p = \alpha_{n_0} \\ p = p + \alpha_{n+1}, \quad n = n_0, \dots, N-1 \end{cases}$$

στο τέλος του loop παίρνουμε: $\boxed{p = S_N}$

<u>Ερωτήματα</u>:
- Τι μπορώ να πω για το σφάλμα $E_N := S - S_N \geq 0$?
- Ποιό N να επιλέξω στους υπολογισμούς μου?
- Ποιό κριτήριο τερματισμού να εφαρμόσω στην επαναληπτική διαδικασία και τι εννοώ?

<u>Απάντηση</u>: Συνήθως διαλέγουμε ένα μικρό θετικό αριθμό TOL>0 π.χ. TOL$=10^{-6}$ και σταματάμε τις επαναλήψεις όταν για κάποιο $N \geq n_0+1$ ικανοποιείται: $|S_N - S_{N-K}| \leq TOL$

όπου $K \in \mathbb{N}$ καθορισμένος π.χ. αν $K=1$ τότε $|S_N - S_{N-1}| \leq TOL$

ή $K=2$ τότε $|S_N - S_{N-2}| \leq TOL$ κ.ο.κ.

($\underline{Σημ.}$ $S_N - S_{N-K} = \sum_{\ell=N-K+1}^{N} \alpha_\ell$)

Σ' αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιώντας την αντίστροφη τριγωνική ανισότητα παίρνουμε: Lb2.4

$$TOL \geq |S_N' - S_{N-k}'| = |(S_N' - S) + (S - S_{N-k}')|$$
$$\geq \big| |S_N' - S| - |S - S_{N-k}'| \big|$$

$$\Rightarrow \quad |E_N - E_{N-k}| \leq TOL.$$

(Εδώ γνωρίζουμε ότι η ακολουθία $(E_n)_{n=n_0}^{\infty}$ των σφαλμάτων είναι φθίνουσα και φραγμένη κάτω από το 0 δηλ.

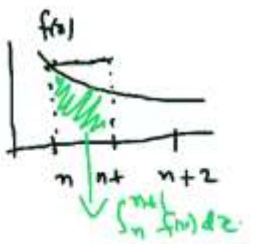
$$0 \leq E_{m+1} \leq E_m \quad \forall m \geq n_0.)$$

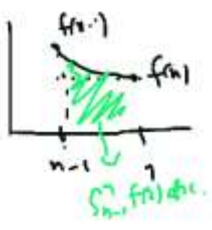
Παρόλα αυτά δεν έχουμε μια εικόνα για το "μέγεθος" του σφάλματος E_N.

Θα περιοριστούμε σε μία κατηγορία σειρών οι οποίες σχετίζονται με το κριτήριο ολοκληρώματος. Γι' αυτή την κατηγορία μπορούμε να πούμε περισσότερα για το σφάλμα προσέγγισης E_N. Lb2.5

Έστω: $a_n \geq 0 \ \forall n \geq n_0$ και $a_n = f(n) \ \forall n \geq n_0$, όπου $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ φθίνουσα. Τότε:

$$\int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \quad \forall n \geq n_0 + 1$$





Ιδ2.6 Παρατηρούμε ότι:

$$E_m := S - S_m = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n - \sum_{n=n_0}^{m} a_n = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \ \forall m \ge n_0,$$

δηλ. $E_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} f(n) \quad \forall m \ge n_0.$

Είδαμε ότι: $\int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx, \ \underline{\forall n \ge n_0+1}$

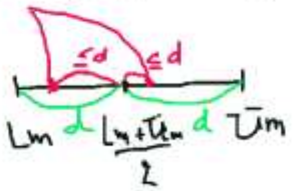
Άρα: $$\sum_{n=m+1}^{N} \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=m+1}^{N} f(n) \le \sum_{n=m+1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(x)\,dx \quad \forall N \ge m+1, \forall m \ge n_0$$

$$\Rightarrow \int_{m+1}^{N+1} f(x)\,dx \le \sum_{n=m+1}^{N} f(n) \le \int_m^{N} f(x)\,dx, \ \forall N \ge m+1, \forall m \ge n_0$$

$$\xRightarrow{N \to +\infty} \underbrace{\int_{m+1}^{+\infty} f(x)\,dx}_{L_m} \le \overset{E^m}{\boxed{\sum_{n=m+1}^{\infty} f(n)}} \le \overset{U^m}{\int_m^{+\infty} f(x)\,dx}, \ \forall m \ge n_0$$

Ιδ2.7

Έτσι: $E^m \in [L_m, U_m]$, $\forall m \ge n_0$.



$d = U_m - L_m$

$$\Rightarrow \left| E^m - \frac{L_m+U_m}{2} \right| \le \frac{U_m - L_m}{2}$$

[Πράγματι: $E^m \in [L_m, U_m] \Rightarrow L_m - \frac{L_m+U_m}{2} \le E^m - \frac{L_m+U_m}{2} \le U_m - \frac{L_m+U_m}{2}$

$-\left(\frac{U_m - L_m}{2}\right) = \frac{L_m - U_m}{2} \le E^m - \frac{L_m+U_m}{2} \le \left(\frac{U_m - L_m}{2}\right)$]

L6 2.8

$$\Rightarrow \left| S - S_m - \frac{L_m + U_m}{2} \right| \le \frac{U_m - L_m}{2}$$

$$\Rightarrow \left| S - \left(S_m + \frac{L_m + U_m}{2} \right) \right| \le \frac{U_m - L_m}{2}$$

Δηλ. προσεγγίζουμε το S με την ποσότητα:
$\boxed{\hat{S}_m := S_m + \frac{L_m + U_m}{2}}$ με σφάλμα το πολύ $\sigma_m = \frac{U_m - L_m}{2}$

Σ' αυτή την περίπτωση εφαρμόζουμε το κριτήριο τερματισμού:

$$\boxed{\sigma_m \le TOL}$$

L6 2.9

<u>Εφαρμογή</u>: $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = \pi^2/6.$

$f(x) = 1/x^2 \quad \forall x \ge 1.$ φθίνουσα.

$$U^m = \int_m^{\infty} 1/x^2 \, dx = \left[-1/x \right]_m^{\infty} = 1/m, \quad L^m = \int_{m+1}^{\infty} 1/x^2 \, dx = \frac{1}{m+1}.$$

Το S προσεγγίζεται από το $\hat{S}_m = S_m + \frac{1/m + 1/(m+1)}{2} = \boxed{S_m + \frac{2m+1}{2m(m+1)}}$

$$\sigma_m := \frac{1}{2}(L_m - U_m) = \frac{1/m - 1/(m+1)}{2} = \frac{1}{2m(m+1)} \le TOL$$

Έτσι: $|S - \hat{S}_m| \le \sigma_m = \frac{1}{2} \frac{1}{m(m+1)} = O(m^{-2}) \le TOL.$

Βασικά σημεία προγράμματος:

1. $TOL = 10^{-4}$. Για ποιο m σταματάνε οι επαναλήψεις όταν απαιτούμε $\sigma_m \le TOL$ $(m=71)$.

2. $S - \hat{S}_m = ?$ δηλ. όταν σταματάει η διαδικασία ποιο είναι το ακριβές σφάλμα? Είναι μικρότερο από TOL?
$S = \frac{\pi^2}{6}$

3. Ποια είναι καλύτερη προσέγγιση του S? Το S_m ή το $\hat{S}_m$?

4. Για ποιο $\tilde{m}$ τερματίζει η διαδικασία όταν απαιτούμε: $|S_{\tilde{m}} - S_{\tilde{m}-1}| \le TOL$? Ποιο είναι τότε το αντίστοιχο σφάλμα $E_{\tilde{m}} = S - S_{\tilde{m}}$.

Διερεύνηση: Δοκιμάστε τη διαδικασία για άλλες σειρές π.χ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/10}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.1}} < +\infty$$