L6 3.0

Εργαστήριο Υπολογιστών 3 (εξ αποστάσεως)

(βίντεο)

ΜΕΜ-255 Θ. Προσέγγισης και Εφαρμογές
ΧΕ 2020
UoC

L6 3.1

<u>Σκοπός μας είναι ο υπολογισμός της βέλτιστης προσέγγισης</u>
<u>από υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης</u>

- $\mathbb{V} = (\mathbb{R}, V, +, \cdot, (\cdot,\cdot))$ γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο
- $Y \subset V$ υπόχωρος με πεπερασμένη διάσταση πχ. $N \in \mathbb{N}$.
- $\mathcal{B} = (y_j)_{j=1}^{N}$ μια βάση του Y
- $v \in V$. Έχουμε δείξει ότι υπάρχει η βέλτιστη προσέγγιση $v^* \in Y$ του v από τον Y ως προς τη νόρμα που παράγεται από το εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$. Ας είναι $(\alpha_j^*)_{j=1}^{N} \subset \mathbb{R}$ οι συντελεστές του v^* ως προς τη βάση $\mathcal{B}$, δηλ. $v^* = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* y_j$. Τότε, επειδή $(v - v^*, y) = 0 \ \forall y \in Y$, έχουμε:

$$\text{"κανονικές εξισώσεις"} \quad \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^* (y_j, y_i) = (v, y_i), \quad 1 \le i \le N$$

οι οποίες συνιστούν ένα $N \times N$ γραμμικό σύστημα με πίνακα συμμετρικό και θετικά ορισμένο.

Όταν τα στοιχεία της βάσης $\mathcal{B}$ είναι ορθογώνια τότε: Lb3.2

$$a_i^*\,(y_i,y_i)=(v,y_i) \qquad i=1,\dots,N$$

$$\Rightarrow \quad a_i^*\,\|y_i\|^2=(v,y_i) \qquad i=1,\dots,N$$

$$\underset{y_i\neq 0}{\Rightarrow} \quad a_i^*=\frac{(v,y_i)}{\|y_i\|^2} \quad ,\ i=1,\dots,N$$

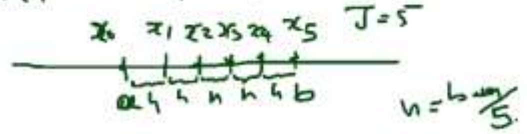
$$\text{ή} \quad a_i^*=\frac{(v,y_i)}{(y_i,y_i)} \quad ,\ i=1,\dots,N.$$

<u>Εφαρμογή</u>. Διαλέγουμε κάποιο διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$ όπου: $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$, V να είναι ο χώρος των συναρτήσεων $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ οι οποίες είναι Riemann ολοκληρώσιμες στο $[a,b]$ και εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbb{R}$ $(g,w)=\int_a^b g(t)w(t)\,dt$ $\forall g,w\in V$. Το εσωτερικό γινόμενο

Lb3.3 είναι καλά ορισμένο επειδή το γινόμενο δύο Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι μία Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

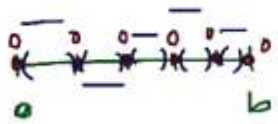
Θα κατασκευάσουμε ένα υπόχωρο Y του V με πεπερασμένη διάσταση ως εξής:

- Διαλέγουμε $J\in\mathbb{N}$ με: $J\geq 5$. [Στη συνέχεια ορίζουμε μια διαμέριση του $[a,b]$ σε J υποδιαστήματα ως εξής: $x_j=a+jh$ $j=0,\dots,J$, όπου: $h=\frac{b-a}{J}$ το πλάτος της (ομοιόμορφης) διαμέρισης.



Lb34

$$\cdot\, \overline{Y} = \left\{ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Riemann} \\ \text{ολοκληρώσιμες} \\ \text{στο } [a,b]}}{g \in V} : \begin{array}{c} g(x_j) = 0 \quad j = 0, \dots, J, \\ \text{και} \\ \text{υπάρχουν } (c_j)_{j=1}^{J} \subset \mathbb{R} \text{ τ.ω.} \\ g(t) = c_j \ \ \forall\, t \in \underbrace{(x_{j-1}, x_j)}_{I_j},\ j = 1, \dots, J. \end{array} \right\}$$



Δηλ. μια συνάρτηση $g \in \overline{Y}$ έχει τιμή 0 στους κόμβους και, για $j = 1, \dots, J$, η g έχει σταθερή τιμή στο I_j. (Είναι προφανές ότι ο $\overline{Y}$ είναι υπόχωρος και ότι πράγματι κάθε κατά τμήματα σταθερή συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη).

Lb3.5

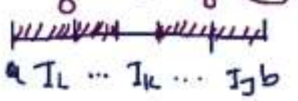
<u>Ερ</u>: $\dim \bar{Y} = ?$

<u>Απ</u>: $\dim \bar{Y} = J$

<u>Ερώτηση:</u> Ποιά είναι μία βάση του $\bar{Y}$?

<u>Απ</u>: Μια βάση του $\bar{Y}$ αποτελούν οι συναρτήσεις:

$$Y_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{όταν } t \in I_k \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad \forall t \in [a,b],\ k = 1, \dots, J.$$



Lb3.6

Έτσι αν $g \in \bar{Y}$ τότε $g(t) = \sum_{j=1}^{J} c_j \cdot y_j(t)\ \forall t \in [a,b]$.

Είναι προφανές ότι:

$$(y_k, y_\lambda) = \begin{cases} h & \text{όταν } k = \lambda \\ 0 & \text{όταν } k \neq \lambda \end{cases}, \quad 1 \le k, \lambda \le J$$

$$k \neq \lambda: \quad (y_k, y_\lambda) = \int_a^b y_k(t) y_\lambda(t)\,dt = \int_{I_k} \underbrace{\underbrace{y_k(t)}_{=1} \cdot \underbrace{y_\lambda(t)}_{=0}}_{0}\,dt = 0$$

$$k = \lambda \quad (y_k, y_\lambda) = (y_k, y_k) = \int_a^b y_k^2(t)\,dt = \int_a^b y_k(t)\,dt = \int_{I_k} 1\,dt = h$$

Άρα τα $(y_k)_{k=1}^{J}$ είναι ορθογώνια και μη μηδενικά (έτσι είναι προφανώς γραμμ. ανεξάρτητα)

Lb3.7

Μας δίνεται: $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ και θέλουμε να βρούμε τη βέλτιστη προσέγγιση $f^* \in \underline{Y}$ της f από τον $\underline{Y}$.

Από το σύστημα των κανονικών εξισώσεων και από το γεγονός ότι τα $(y_k)_{k=1}^{J}$ είναι ορθογώνια έπεται ότι:
$$f^* = \sum_{k=1}^{J} a_k^* y_k \quad \text{με: } a_k^* := \frac{1}{h} \underbrace{\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt}_{= (f, y_k)}, \quad k=1,\dots,J.$$

(Το a_k^* είναι γνωστό ως μέσος όρος της f στο I_k).

Lb3.8

Αριθμητική προσέγγιση ολοκληρώματος:

$\psi : [\gamma,\delta] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \psi \in C([\gamma,\delta];\mathbb{R})$

$$\int_{\gamma}^{\delta} \psi(t)\,dt \simeq Q = \underbrace{\frac{(\delta-\gamma)}{6}\left[\psi(\delta) + 4\psi\left(\tfrac{\delta+\gamma}{2}\right) + \psi(\gamma)\right]}_{\text{κανόνας Simpson}}$$

κανόνας Simpson

είναι ακριβής όταν $\psi \in \mathbb{P}^3$.

Lb3.9

Γράψτε ένα πρόγραμμα το οποίο να υπολογίζει τους συντελεστές: $\alpha_k^* = \frac{1}{h}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,dt$, $k=1,\dots,J$, χρησιμοποιώντας τον κανόνα Simpson για $f(t)=\sin(t)$, $[a,b]=[0,2\pi]$ και $J=10$. Επιπλέον κάντε το γράφημα της f και της f^* στο $[a,b]$.

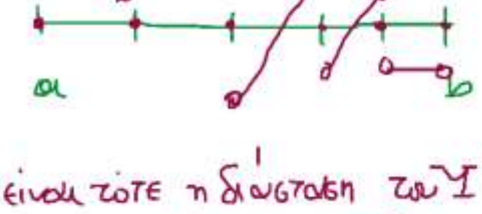
<u>ΕΡΩΤΗΣΗ</u>: Εδώ κάθε στοιχείο του $\tilde{Y}$ έχει σταθερή τιμή σε κάθε υποδιάστημα. Θα μπορούσαμε να φτιάξουμε το $\tilde{Y}$ έτσι ώστε να αποτελείται από συναρτήσεις g με μηδέν τιμή στους κόμβους οι οποίες να είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού σε κάθε υποδιάστημα;

Lb3.10

Δηλ. $g(x_j)=0 \quad j=0,\dots,J$

$g|_{I_j} \in \mathbb{P}^1, \quad j=1,\dots,J.$

<u>Προσοχή</u>: Δεν απαιτούμε τα στοιχεία του $\tilde{Y}$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις.



<u>Ερ</u>. Ποιά είναι τότε η διάσταση του $\tilde{Y}$? → (με: πρόγραμμα)
Προτείνετε μια βάση για το $\tilde{Y}$ και βρείτε την αντίστοιχη βέλτιστη προσέγγιση $f^* \in \tilde{Y}$ μιας $f \in C[a,b]$.